

GMTH Proceedings 2021

herausgegeben von
Florian Edler und Immanuel Ott

Tonsysteme und Stimmungen

21. Jahreskongress der
Gesellschaft für Musiktheorie
Basel 2021

herausgegeben von
Moritz Heffter, Johannes Menke,
Florian Vogt und Caspar Johannes Walter



Die GMTH ist Mitglied von CrossRef.
<https://www.crossref.org>



Diese Ausgabe erscheint im Open Access und ist lizenziert unter einer
Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.



This is an open access volume licensed under a
Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Die Geometrie von Akkordverwandtschaften

Harmonik im *circular pitch-class space*

Visualisierungen von Tonsystemen auf Kreisen haben eine lange Tradition: Johann David Heinichen entwarf 1728 auf der Suche nach geeigneten Darstellungsmöglichkeiten für die von Athanasius Kircher in seiner Schrift *Musurgia universalis* (1650) entwickelten Theorie einen ›Musicalischen Circul‹, der einige Jahre später von Johann Mattheson verbessert wurde: »Verbesserter Musicalischer Cirkel, Der bequemer durch Alle Ton-Arten rund führen kann, als die bisher erfundene« (1735). Zahlreiche weitere Quellen aus dem 18. Jahrhundert dokumentieren die Auseinandersetzung von Musiktheoretikern mit Abbildungen von Tonsystemen auf Kreismodellen. Die heutige Musiktheorie verwendet Kreismodelle zur Darstellung von Tonsystemen häufig in Kombination mit modernen geometrischen Methoden, die sich auch für die Analyse der Harmonik im 20. und 21. Jahrhundert eignen (z.B. Coxeter-Gruppen, NRT-Modelle). Der Aufsatz knüpft an dieses Arbeitsfeld an und präsentiert eine geometrische Theorie der Akkordverwandtschaften, die auf dem Konzept des Raums und speziell der Raumerweiterung basiert. Leitfragen sind: Wie hängen diatonische und nicht-diatonische Skalen sowie Akkorde und Akkordverbindungen in einem gemäß der *Pitch-Class Set Theory* konstruierten Kreismodell zusammen? Welche Möglichkeiten zur Entwicklung eines Abstandsbegriffs für Zusammenklänge eröffnet das Raumkonzept? Welche Klänge sind stabil und warum? Welche Bedeutung haben die geometrischen Kategorien Symmetrie und Kongruenz für die Musik? Welche Konsequenzen ergeben sich für Akkordprogressionen wie beispielsweise Modulationsprozesse? Welchen Erkenntnisgewinn eröffnet die vorgeschlagene Visualisierung von Verwandtschaftsbeziehungen?

Visualisations of tonal systems with circles have a long tradition: Johann David Heinichen proposed the concept of ›Musicalischer Circul‹ in 1728 when seeking suitable representations of Athanasius Kircher's theory presented in *Musurgia universalis* (1650). A few years later, Johann Mattheson improved Heinichen's concept: »Verbesserter Musicalischer Cirkel, Der bequemer durch Alle Ton-Arten rund führen kann, als die bisher erfundene« (1735). Several other 18th-century sources provide information on how music theorists considered the issue of mapping tonal systems to circles. Recent approaches frequently combine representations of tonal systems with circles with modern geometric methods that often are suitable for analysing harmony in 20th and 21st century as well (e.g. Coxeter groups, NRT-models). The present paper contributes to this area of research and presents a geometric theory of chord relationships that is based on the concepts of space and spatial extension. The leading questions are: How do diatonic and non-diatonic scales and chords or chord progressions relate in a circular model based on the pitch-class set theory? Is it possible to derive a distance measure for chords from the space concept? Which groups of pitches are stable and why? What implications do the geometric categories of symmetry and congruence have in music? What are the resulting consequences for chord progressions (e.g. modulations)? What are benefits of the suggested visualisation of chord relationships?

SCHLAGWORTE/KEYWORDS: Abstandsbegriff; Akkordverwandtschaft; circular models; diatonic spaces; diatonische Räume; distance term; Geometrie von Klängen; geometry of chords; Kreismodelle; Modulation; modulation; relationship of chords

»Geometry provides a powerful tool for modeling musical structure.«¹ Dieser zentrale Satz aus Dmitri Tymoczkos richtungsweisender Buchpublikation *A Geometry of Music* spielt auf Synergien an, die an der Schnittstelle zwischen Mathematik und Musik entstehen. Moderne mathematische Methoden haben seit einigen Jahren gewinnbringende Anwendungen für die Musiktheorie erwirkt: die *Neo-Riemannian Theory*, zwar benannt nach Hugo Riemann, aber entwickelt, um das Beziehungsgeflecht zwischen Harmonien besser beschreiben zu können, wird wesentlich von Transformationen im planaren Tonnetz bestimmt,² die sich für Anwendungen der Gruppentheorie eignen. Im deutschen Sprachraum wurde jüngst auf Erweiterungen hinsichtlich mehrdimensionaler Tonnetze und neuer geometrischer Modelle zur Darstellung von Tonsystemen hingewiesen.³ Besonders Kreismodelle haben sich für die Darstellung von Tonvorräten bewährt.⁴ Die Analyse der Anfangstakte aus Richard Wagners *Tristan und Isolde* mit einem *circular pitch-class space* wurde beim GMTH-Aufsatzwettbewerb 2019 mit einem Preis ausgezeichnet.⁵ Der vorliegende Text knüpft an dieses Arbeitsgebiet an und setzt sich das Ziel, Vorzüge der Darstellung von Akkorden und Akkordverbindungen in diatonisch bzw. chromatisch geordneten Kreismodellen aufzuzeigen. Nach einer Einführung in den verwendeten Sprachgebrauch und einige Grundbegriffe werden aufbauend zunächst Dreiklänge, dann Vier- und Mehrklänge betrachtet; die Analyse von Verwandtschaftsbeziehungen schließt Notenbeispiele bis hin zu freitonaler Musik (A. Bergs *Lyrische Suite*) ein. Leitfragen sind: (1) Wie hängen diatonische und nicht-diatonische Skalen sowie Akkorde und Akkordverbindungen in einem gemäß der *Pitch-Class Set Theory* konstruierten Kreismodell zusammen? (2) Welche Möglichkeiten zur Entwicklung eines Abstandsbegriffs für Zusammenklänge eröffnet das Raumkonzept? (3) Welche Klänge sind stabil und warum? (4) Welche Bedeutung haben die geome-

1 Tymoczko 2011, 19.

2 Cohn 2012, 29f.

3 Rieke 2019, 50ff.

4 Siehe hierzu auch Schiltknecht 2011, 357.

5 Jabs / Rudolph 2019, 171.

trischen Kategorien Symmetrie und Kongruenz für die Musik? (5) Welche Konsequenzen ergeben sich für Akkordprogressionen wie beispielsweise Modulationsprozesse? (6) Welchen Erkenntnisgewinn eröffnet die vorgeschlagene Visualisierung von Verwandtschaftsbeziehungen?

Kreismodelle und diatonische Räume

Auf den griechischen Mathematiker Euklid (3. Jh. v. Chr.) geht folgender Divisionsalgorithmus zurück: Gegeben ist eine ganze Zahl a und eine natürliche Zahl $b \geq 1$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen q und r mit der Eigenschaft $a = q \cdot b + r$, wobei $0 \leq r < b$. Dabei heißt r der Rest, der bei Division von a durch b entsteht. Ein Beispiel: Bei der Division durch 12 ($b = 12$) haben die Zahlen 11, 23 und 35 die Darstellungen $11 = 0 \cdot 12 + 11$, $23 = 1 \cdot 12 + 11$ und $35 = 2 \cdot 12 + 11$. Sie haben alle denselben Rest ($r = 11$) und können folglich in einer Klasse gesammelt werden, der sog. Restklasse [11], in Zeichen $11, 23, 35 \in [11]$. Allgemeiner gilt: [11] enthält alle ganzen Zahlen, die bei Division durch 12 den Rest 11 haben, und umgekehrt ist jede ganze Zahl mit Rest 11 bei Division durch 12 ein Element von [11]. Die insgesamt zwölf Restklassen [0], [1], [2], ..., [11] bei der Division durch 12 gemäß dem Euklidischen Algorithmus können wir nun dem 12-Ton-Vorrat der chromatischen Skala auf verschiedene Arten zuordnen. Töne werden dabei gemäß Oktaväquivalenz und enharmonischer Äquivalenz ihrerseits in Tonklassen zusammengefasst. Bei einer Abbildung des Systems der Restklassen auf einen Kreis sind zwei Modelltypen zu unterscheiden (vgl. Abb. 1).

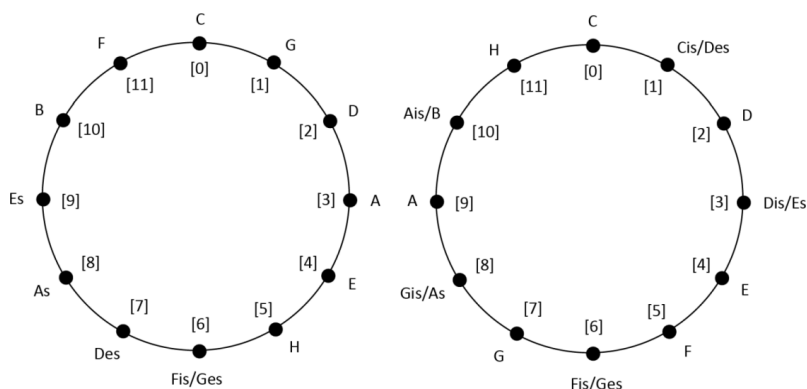


Abbildung 1: Diatonisches (links) und chromatisches (rechts) Kreismodell; das Modell rechts entspricht der *Pitch-class Set Theory* nach Allen Forte.

Es wird der folgende Sprachgebrauch eingeführt: Im ›diatonischen‹ Kreismodell werden die Tonklassen im Quintabstand angeordnet und $[0] = C$, $[1] = G$, $[2] = D$ usw. gesetzt, im ›chromatischen‹ Kreismodell hingegen ansteigend in Halbtonschritten mit $[0] = C$, $[1] = C\sharp$, $[2] = D$ usw. Diese beiden Darstellungsmodelle sollen im Folgenden verwendet und auch einander gegenübergestellt werden, um Skalen, Akkorde und Akkordverbindungen zu visualisieren (Leitfragen 1 und 6).

Das diatonische Kreismodell eignet sich besonders für die graphische Darstellung einer nicht-alterierten Diatonik, da jede Heptatonik⁶ im Kreismodell durch einen Halbkreis repräsentiert wird.⁷ Bisherige Darstellungen bleiben allerdings bei der Visualisierung des Tonmaterials auf Kreismodellen stehen, untersuchen jedoch keine Transformationsprozesse dieses Materials, wie beispielsweise Kadenzten. Die vorliegende Arbeit will hierzu einen Anstoß geben und stützt sich auf das folgende Konzept zur Genese von Tonarten.

Gegeben sei eine Diatonik, die im diatonischen Kreismodell durch einen Halbkreis visualisiert wird. Die Randpunkte dieses Halbkreises bilden die ›charakteristische Dissonanz‹ bei ›Zentrierung‹⁸ des zweiten bzw. fünften Tons der Heptatonik. Betrachten wir exemplarisch die Heptatonik $\{F, C, G, D, A, E, H\}$.⁹ Dann wird $\{C\}$ genau dann ›(stark) authentisch zentriert‹, wenn $\{H\} \rightarrow \{C\}$ in einer Kadenz dem Skalenschritt $7 \rightarrow 8$ entspricht und $\{C\}$ zugleich Prim des Zielakkords ist.¹⁰ Eine auf diese Weise zentrierte Heptatonik wird $\{F, \underline{C}, G, D, A, E, H\}$ geschrieben. Hingegen wird $\{A\}$ in unserem Beispiel genau dann ›(stark) plagal zentriert‹, wenn $\{F\} \rightarrow \{E\}$ in einer Kadenz dem Skalenschritt $6 \rightarrow 5$ entspricht und $\{E\}$ zugleich Quintton im Zielakkord ist. Eine auf diese Weise zentrierte Heptatonik wird $\{F, C, G, D, \underline{A}, E, H\}$ geschrieben. Der unterstrichene Zentralton wird zum ›Grundton‹ (bzw. Prim einer I. Stufe). Die charakteristische Dissonanz $\{F, H\}$ verstärkt die authentische bzw. plagale Zentrierung im Anfangsakkord einer kadenzierenden Akkordverbindung zur Zielharmonie, beispielsweise in den authentischen Kadenzten V–I (durch Ergänzung von $\{F\}$ als Akkordseptime von G-Dur nach C-Dur) bzw. VII–I.

6 Die Begriffe Diatonik und Heptatonik werden synonym für ein 7-Set, das durch eine aufsteigende Folge von sechs reinen Quinten repräsentiert werden kann, verwendet.

7 Schiltknecht 2015, 377 (Abb.5).

8 Begriffsverständnis nach Stefan Mey, Castor Landvogt (HMTM Hannover); siehe auch Harrison 1994, 25 ff.

9 Punktmengen bzw. Ton-Sets werden hier mit geschweiften Klammern bezeichnet. Wenn nichts Anderes gesagt wird, ist ein Set $\{x, y, \dots\}$ stets ungeordnet.

10 Skalentöne diatonischer Skalen werden mit 1, 2, 3, ..., 7, 8 (= 1) bezeichnet.

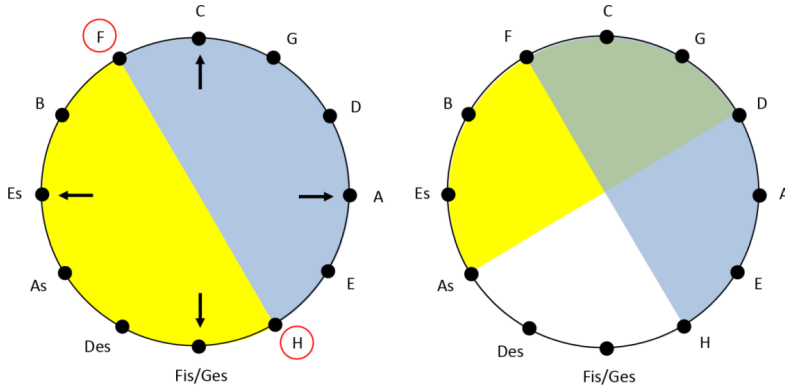


Abbildung 2: Zwei Hemisphären, die je eine diatonische Skala repräsentieren. Links: Das 2-Set {F, H} ist die charakteristische Dissonanz bei Zentrierung (Pfeil) von {C} bzw. {A} in der blau gefärbten Diatonik und {Ges} bzw. {Es} in der gelb gefärbten Diatonik. Rechts: Mögliche Lagebeziehung zweier diatonischer Räume mit echter Schnittmenge (grün).

Im linken Bild von Abb. 2 ist der diatonische Kreis in zwei Hemisphären unterteilt, die sich in {F, H} schneiden. Die obere Hemisphäre repräsentiert die Heptatonik {F, C, G, D, A, E, H} mit charakteristischer Dissonanz {F, H}, die untere Hemisphäre die Heptatonik {Ces, Ges, Des, As, Es, B, F}, wobei {Ces, F} = {F, H} die charakteristische Dissonanz darstellt.

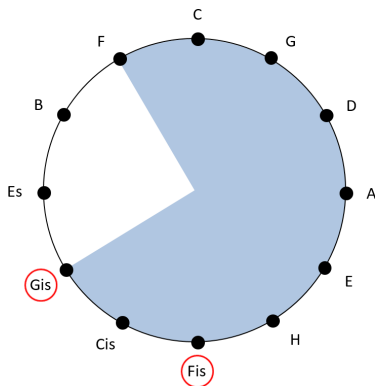


Abbildung 3: Erweiterung des diatonischen Halbraums bei Einbeziehung des alterierten 6. und 7. Skalentons (rot) in a-Moll. Der erweiterte Raum umfasst 75 % des gesamten Tonsystems.

Durch Zentrierung entstehen aus heptatonischen Räumen Dur- und natürlich-Moll-Skalen. Die dem Dur-Moll-System inhärente Asymmetrie kommt auf geometrischer Ebene dadurch zum Ausdruck, dass sich in Moll bei Einbeziehung des erhöhten 7. Skalentons (harmonisch Moll) als Leitton eine Erweiterung des Halb-

raums um einen $\frac{1}{4}$ -Kreis vollzieht (Abb. 3). Das Tonmaterial der melodisch-Moll-Skala mit dem alterierten 6. und 7. Skalenton in Aufwärtsrichtung und dem nicht alterierten 6. und 7. Skalenton in Abwärtsrichtung ist ebenfalls im erweiterten 10-Ton-Raum enthalten. Die Einbeziehung des Leittons in Moll führt also einerseits zu einer Raumerweiterung und daher einer Schwächung der Diatonik, mit Blick auf eine authentische Zentrierung andererseits zu einer Verstärkung kadenzierender Kräfte. Um mit dem Konzept der diatonischen Halbräume arbeiten zu können, sollen ab jetzt nur Dur-Skalen betrachtet werden.

Intervalle und Dreiklänge

Zusammenklänge von zwei oder mehr Tönen werden im Kreismodell durch einen Polygonzug visualisiert. Er klingt ein Intervall, so werden die beiden Töne des Intervalls durch ein Liniensegment verbunden. Die reine Prime stellt eine Ausnahme dar und wird weiterhin als Einpunktmenge visualisiert. Ein Dreiklang wird durch ein Dreieck visualisiert, ein Vierklang durch ein Viereck usw. Im diatonischen Kreismodell werden alle Dur- und Molldreiklänge durch kongruente Dreiecke beschrieben, d.h. sie können durch eine Kongruenzabbildung (z.B. Drehung, Spiegelung) zur Deckung gebracht werden. Der verminderte Dreiklang wird durch ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck beschrieben.¹¹ Betrachten wir ›non-temporal‹¹² den zentrierten diatonischen Halbraum {F, $\underline{C}$, G, D, A, E, H}, so sind alle leitereigenen Dreiklänge in der zugehörigen Hemisphäre enthalten, vgl. Abb. 4.

Gehen wir umgekehrt von einem gegebenen Dreiklang aus, hier dem C-Dur-Dreiklang, so finden wir insgesamt drei Hemisphären, die diesen Dreiklang enthalten, vgl. Abb. 5. Nur für das linke Beispiel mit {F, $\underline{C}$, G, D, A, E, H} gilt, dass der C-Dur-Dreiklang keinen Punkt der charakteristischen Dissonanz der jeweiligen Diatonik enthält; im Fall der authentischen Zentrierung von {C} repräsentiert er die I. Stufe. Mit Blick auf die Frage nach der Stabilität von Harmonien bezogen auf eine Tonart (Leitfrage 3) lässt sich an der geometrischen Darstellung ablesen, dass ein Dur/Moll-Dreieck, das vollständig in einen diatonischen Halbraum ein-

11 Dies ist eine Folgerung aus dem Satz des Thales, nach dem jeder Winkel im Halbkreisbogen ein rechter ist.

12 Als Einzelereignis ohne zeitliche Abfolge weiterer Ereignisse. Begriffsverständnis nach Stefan Mey: »Zeit-Konzepte / Anmerkungen zum ›temporalen‹ und ›non-temporalen‹ Verstehen von Musik«, Vortrag auf dem 20. Jahreskongress der Gesellschaft für Musiktheorie, Detmold 2020. Veröffentlichung geplant für die *GMTH Proceedings 2020*.

gebetet ist, eine zentrale Harmonie repräsentiert. Sobald das Dur/Moll-Dreieck die charakteristische Dissonanz berührt, hat die korrespondierende Harmonie bezogen auf den Zentralklang eine Auflösungsbestrebung.

Zugleich zeigt das Kreismodell, dass es für eine diatonische Modulation nicht ausreicht, wenn zwei diatonische Skalen hinsichtlich ihrer Halbräume einfach nur eine echte Überlappung aufweisen (siehe Abb.2, rechts). Die entstehende Schnittmenge muss zugleich so reichhaltig sein, dass darin ein Dur/Moll-Dreieck verortet werden kann. Abb.2 und Abb.5 zeigen, dass Dur-Tonarten, die drei oder mehr Quinten auseinanderliegen, keine hinreichend reichhaltige Schnittmenge haben: Während das Dreieck zum C-Dur-Dreiklang in die Halbräume, deren korrespondierende Diatonik auf F-Dur, C-Dur bzw. G-Dur zentriert werden kann, eintaucht (Abb. 5), kann ein solches Dur/Moll-Dreieck nicht in die grüne Schnittmenge in Abb.2 (rechts) eingefügt werden. Eine diatonische Modulation $F \rightarrow G$ ist also möglich, $C \rightarrow Es$ jedoch nicht.

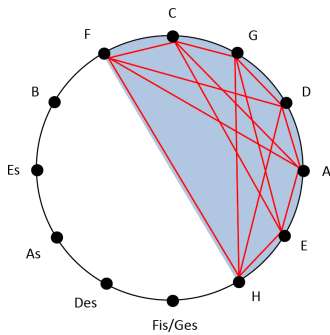


Abbildung 4: Leitereigene Dreiklänge in C-Dur

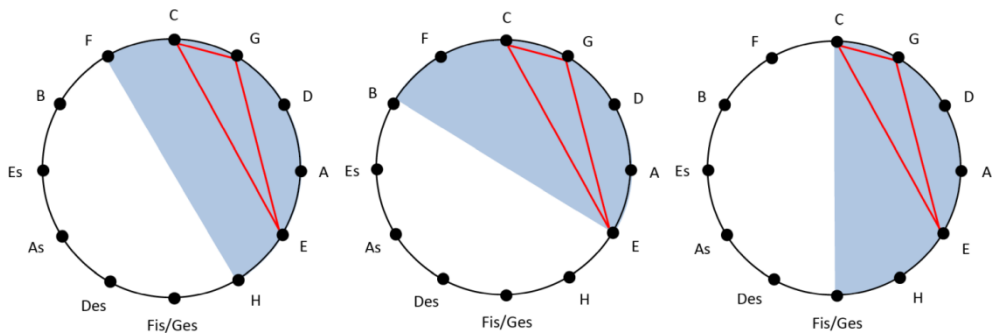


Abbildung 5: Fixierter Dur-Dreiklang in verschiedenen Hemisphären

Die geometrischen Kategorien Kongruenz und Symmetrie haben nun Konsequenzen für die Beziehung der durch sie repräsentierten Harmonien (Leitfrage 4), und eine darauf basierende Systematik ist in der Literatur bisher ebenfalls nicht vorgelegt worden: Haben zwei Dur/Moll-Dreiklänge zwei Kanten gemeinsam, so sind sie identisch. Betrachten wir also den Fall, wenn zwei Dreiklänge nur eine gemeinsame Kante haben. Dies führt uns zu Medianten ersten Grades: Wenn wir weiterhin den C-Dur-Dreiklang als Referenz wählen, so stellen wir fest, dass sowohl C-Dur als auch der Parallelklang a-Moll einen Kreisausschnitt mit Weite 120° (entsprechend einem Bogensegment der Länge von 5 Punkten) einschließen (Abb. 6, links). Beziehen wir den Gegenklang e-Moll in die Betrachtung ein, so weitet sich der Bogenwinkel auf 150° (entsprechend einem Bogensegment mit einer Länge von 6 Punkten). Auch der Dur-Moll-Wechsel (C-Dur $\rightarrow$ c-Moll) fällt in die Kategorie der Dreiklänge mit einer gemeinsamen Kante. Die Visualisierung zeigt, dass der c-Moll-Dreiklang in keinem der diatonischen Halbräume aus Abb. 5 enthalten ist und in diesem Sinn eine große Entfernung zum C-Dur-Dreiklang zu haben scheint (Abb. 6, rechts).

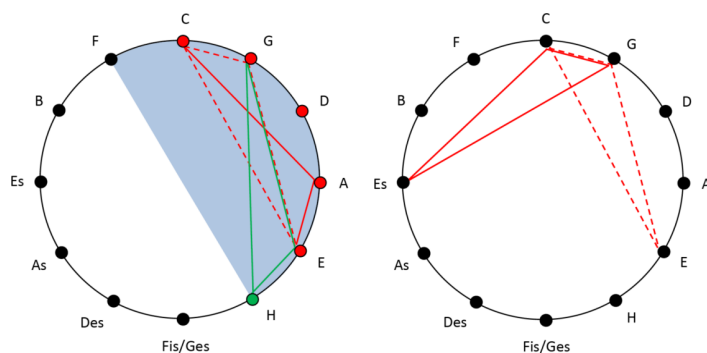


Abbildung 6: Medianten ersten Grades (links) und der Dur-Moll-Wechsel (rechts) ohne gemeinsamen diatonischen Halbraum. Der Referenzakkord C-Dur ist gestrichelt. Die linke Abbildung zeigt die Raumerweiterung bei Vergleich von Ober- und Untermediante zum Referenzdreiklang.

Im Fall, dass zwei Dreiklänge nur einen Punkt gemeinsam haben (und keine gemeinsame Kante), sind zwei Unterfälle möglich (vgl. Abb. 7): Im ersten Fall stehen die Grundtöne beider Dreiklänge im Quintabstand, im zweiten Fall entstehen Medianten zweiten Grades. Medianten zweiten Grades liegen grundsätzlich nicht in einem diatonischen Halbraum. Im Fall der Quintverwandtschaft ist zu unterscheiden, ob der Grundton des zweiten Dreiklangs eine Quinte aufwärts oder eine Quinte abwärts liegt. Liegt er quintaufwärts, so haben sowohl der zugehörige Dur-Dreiklang als auch der zugehörige Moll-Dreiklang einen diatonischen Halb-

raum mit dem Referenzdreiklang gemeinsam (C-Dur/G-Dur bzw. C-Dur/g-Moll). Liegt der zweite Grundton quintabwärts, so liegt nur der zugehörige Dur-Dreiklang mit dem Referenzklang in einem diatonischen Halbraum (C-Dur/F-Dur, wohingegen C-Dur/f-Moll keinen gemeinsamen diatonischen Halbraum aufweisen). Die Verwandtschaft von C-Dur und f-Moll ähnelt in dieser Hinsicht mehr derjenigen von Medianten 2. Grades.

Wenn zwei Dreiklänge keinen gemeinsamen Punkt haben, so haben sie auch keine gemeinsame Kante. Dieser Fall führt einerseits auf Medianten dritten Grades, die nicht in einem gemeinsamen diatonischen Halbraum liegen können. Andererseits zeigt Abb.8, dass auch Fälle möglich sind, wo zwei Dreiklänge zwar keinen gemeinsamen Punkt haben, aber dennoch im selben diatonischen Halbraum liegen, z.B. C-Dur und B-Dur in der Heptatonik {B, F, C, G, D, A, E}.

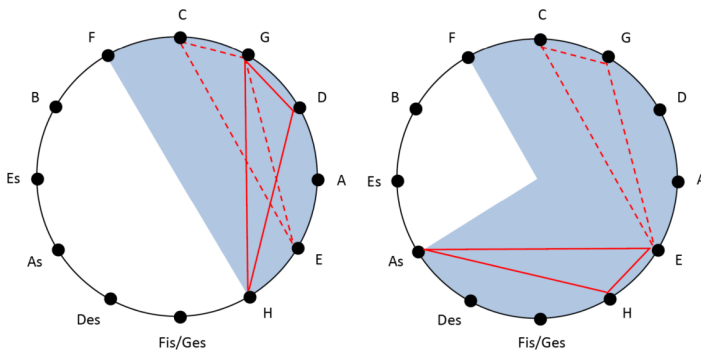


Abbildung 7: Links: Dreiklänge mit quintverwandtem Grundton haben in vielen Fällen einen gemeinsamen Halbraum. Rechts: Medianten zweiten Grades ohne gemeinsamen Halbraum bzw. mit erweitertem $\frac{3}{4}$ -Kreis nach Abb.3.

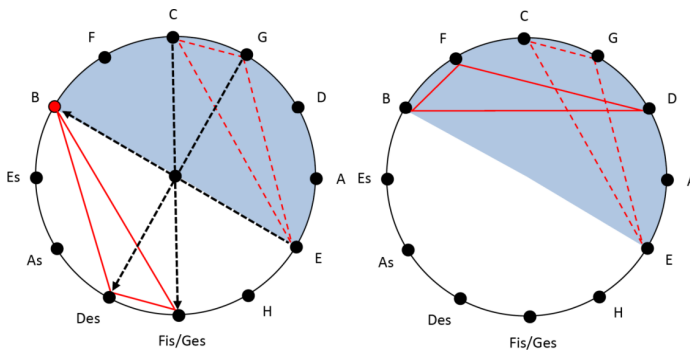


Abbildung 8: Vergleich der Akkordverbindungen C-Dur/Ges-Dur und C-Dur/B-Dur

Vergleichen wir abschließend exemplarisch die Akkordverbindungen (1) C-Dur/Ges-Dur und (2) C-Dur/B-Dur aus Abb.8. Beide Akkordpaare haben keine gemeinsamen Punkte. Im Fall (2) liegen beide Klänge jedoch in einem gemeinsamen diatonischen Halbraum. Auch im Fall (1) lässt sich ein diatonischer Halbraum angeben, der den Referenzdreiklang enthält und der mit dem zweiten Dreiklang zumindest einen Punkt gemeinsam hat (die Heptatonik {B, F, C, G, D, A, E} erfüllt beispielsweise diese Eigenschaft, denn in {B} entsteht eine Überlappung). Das Raumkonzept liefert somit ein Sachargument, dass die Akkordverbindung (1) einen größeren ›Abstand‹ als die Verbindung (2) hat. Jedoch zeigt Abb. 8, dass der Verbindung (1) eine ›Symmetrie‹ zugrunde liegt: Der Ges-Dur-Dreiklang geht durch Punktspiegelung am Mittelpunkt aus dem C-Dur-Dreiklang hervor. Vergleicht man (2) wiederum mit Akkordverbindungen der Form C-Dur/X innerhalb einer gemeinsamen Diatonik, wobei X mit C-Dur gemeinsame Punkte oder gar eine gemeinsame Kante hat, so liegt es nahe, der Akkordverbindung C-Dur/X einen noch geringeren Abstand als der Verbindung (2) zuzuschreiben. Im Fall X = a-Moll haben wir in Abb.6 gesehen, dass sich der gemeinsame Raum beider Akkorde innerhalb der Diatonik {F, C, G, D, A, E, H} sogar noch weiter verengen lässt. Interessante Fälle entstehen bei Akkordverbindungen vom Typ C-Dur/Y, wobei Y beispielsweise einen gemeinsamen Punkt mit C-Dur hat, aber kein gemeinsamer diatonischer Halbraum angegeben werden kann. Im Fall Y = E-Dur kann argumentiert werden, dass der Abstand zu C-Dur größer als in (2) ist, weil keine gemeinsame Diatonik existiert. Im Fall Y = f-Moll kann argumentiert werden, dass der Abstand geringer als in (2) ist, da – auch wenn eine gemeinsame Diatonik fehlt – eine Quintbeziehung der Grundtöne existiert. Ein Abstandsbe-griff für Akkordverbindungen (Leitfrage 2) muss offenbar verschiedene Kategorien wie Quintabstand der Grundtöne, Symmetrie oder Existenz gemeinsamer Halbräume berücksichtigen, so dass eine Aussage über die Stärke einer Akkordverwandtschaft häufig nur hinsichtlich einzelner Merkmale getroffen werden kann.

Vierklänge und andere Terzschichtungen

Vierklänge werden im Kreismodell durch Vierecke beschrieben. Wir betrachten Terzschichtungen und erhalten ausgehend von Dreiklängen in Dur und Moll zunächst Septakkorde, die im diatonischen Kreismodell durch ein charakteristisches Viereck beschrieben werden: Der große Dur-Septakkord und der kleine

Moll-Septakkord werden durch ein symmetrisches Trapez beschrieben und liegen je in einem geeigneten diatonischen Halbraum. Das Viereck des kleinen Dur-Septakkords enthält sogar die charakteristische Dissonanz der zugehörigen Diatonik und der zugehörige Akkord funktioniert damit etwa als ›verstärkte‹ V. Stufe. Ähnlich verhält es sich mit dem halbverminderten Septakkord, der durch Achsenspiegelung aus dem kleinen Dur-Septakkord hervorgeht: {H, D, F, A} entsteht etwa aus {G, H, D, F} durch Spiegelung an der Geraden durch {As, D}. Ergänzen wir zum verminderten Dreiklang in Grundstellung eine kleine Terz, so entsteht der zweifach verminderte Septakkord¹³, dessen Grundstellung aus einer Abfolge kleiner Terzen besteht. Es handelt sich um einen ›symmetrischen Klang‹, denn das zugehörige Viereck ist ein Quadrat und besteht somit aus vier gleichlangen Kanten und vier rechten Winkeln.¹⁴ Auffallend ist, dass dieses Quadrat sowohl aus dem diatonischen als auch aus dem chromatischen Kreismodell hervorgeht.

Abb. 9 visualisiert das Konzept der Raumerweiterung am Beispiel des vollverminderten Septakkords: Wir gehen in ① von der Heptatonik {B, F, C, G, D, A, E} aus, die den F-Dur-Dreiklang als I. Stufe vollständig umfasst. Betrachten wir nun eine I–VII-Fortschreitung zum verminderten Dreiklang der Heptatonik, also das 3-Set {E, G, B}, vergrößert sich hierdurch der eingeschlossene Flächeninhalt. Erweitern wir nun den verminderten Dreiklang zu einem vollverminderten Septakkord durch Hinzunahme von {Des}, so verdoppelt sich der Flächeninhalt beim ›Aufklappen‹ zur Fläche des roten Quadrats. Der so eröffnete Raum erlaubt nun Bewegungen in verschiedene Richtungen: Wir können die Progression unter Ausnutzung der enharmonischen Äquivalenz in vier verschiedene Halbräume weiterführen und erreichen wahlweise die Zielakkorde F-Dur (Ausgangsakkord im Sinne von I–VII–I), As-Dur, H-Dur und D-Dur, deren Grundtöne eine Kleinterzachse ausbilden. Die geometrische Darstellung kann also einen enharmonischen Vorgang einerseits sehr anschaulich machen und andererseits für die Vielfalt der harmonischen ›Richtungswechsel‹ sensibilisieren (Leitfrage 5); damit hat diese Art der Visualisierung Potential für den Musiktheorieunterricht.

13 Der zweifach verminderte Septakkord (mit verminderter Quinte und verminderter Septime) wird auch vollverminderter Septakkord genannt. In dieser Terminologie steht der einfach verminderte Septakkord (mit verminderter Quinte) für den halbverminderten Septakkord. Der dreifach verminderte Septakkord (bestehend aus drei verminderten Intervallen) in erster Umkehrung entspricht dem übermäßigen Quint-Sext-Akkord bzw. ›Mozart-Akkord‹.

14 Zur Darstellung mit Dreieck für Dreiklang und Quadrat für Septakkord vgl. bereits Rameau, 36 ff.

The top part of the image shows a musical score in G major, 2/4 time, with four measures labeled ① through ④. The notes in the measures are: ① G4, B4, D5; ② G4, B4, D5; ③ G#4, B#4, D#5; ④ G#4, B#4, D#5. Below the score are four chromatic mediant diagrams, each showing a circle of 12 notes (C, D, E, F, G, A, B, C, D, E, F, G) with a shaded region representing a triad. The diagrams are labeled ① through ④. Diagram ① shows a blue shaded region for the G major triad (G, B, D) and a red dashed line for the G minor triad (G, Bb, D). Diagram ② shows a blue shaded region for the G major triad (G, B, D) and a red solid line for the G minor triad (G, Bb, D). Diagram ③ shows a blue shaded region for the G major triad (G, B, D) and a red solid line for the G minor triad (G, Bb, D). Diagram ④ shows a blue shaded region for the G major triad (G, B, D) and a red solid line for the G minor triad (G, Bb, D).

Abbildung 9: Akkordprogression mit einem vollverminderten Septakkord im Raumkonzept

Anhand des Ausschnitts aus dem Lied *Die Lotosblume* von Robert Schumann (aus: Myrthen op. 25) in Abb. 10 soll eine vergleichende Gegenüberstellung des diatonischen und chromatischen Kreismodells betrachtet werden. Während das diatonische Kreismodell Akkordtypen ›förmchenhaft‹ visualisiert und mittels des Raumkonzepts diatonischen Skalen zuzuordnen vermag, visualisiert das chromatische Kreismodell Stimmbewegungen in Halbtonschritten, die einer Drehung um eine Einheit auf dem Kreisbogen entsprechen.

8

war - tet sie träu - mend die Nacht. Der

10

Mond der ist — ihr Buh - le, er

pp

The musical score shows a vocal line and a piano accompaniment in 3/2 time. The key signature has two flats (B-flat and E-flat). The vocal line starts at measure 8 with the lyrics 'war - tet sie träu - mend die Nacht. Der' and continues at measure 10 with 'Mond der ist — ihr Buh - le, er'. The piano accompaniment features a series of chords in the right hand and a bass line in the left hand. Below the score are two circular diagrams. The left diagram, labeled 'diatonisches Kreismodell', shows a circle with 12 points representing notes: C, D, E, F, G, A, B, H, Ais/B, Des, Es, and As. It is divided into four colored sectors: blue (C-E-G), green (E-G-B), yellow (G-B-D), and light blue (B-D-F). The right diagram, labeled 'chromatisches Kreismodell', shows a circle with 12 points representing notes: C, Cis/Des, D, Dis/Es, E, F, Fis/Ges, G, Gis/As, Ais/B, A, and H. It shows a network of red lines connecting various notes, illustrating chromatic shifts and voice leading.

Abbildung 10: Erweitert diatonische Modulation F-Dur → As-Dur (C-Dur auf »Nacht« ist die V. Stufe in der Varianttonart f-Moll, so dass Des^{maj7} auf »Mond« sowohl als VI. Stufe in f-Moll als auch als IV. Stufe in As-Dur gedeutet werden kann). Das diatonische Kreismodell (links) visualisiert die Zugehörigkeit von Akkorden zu diatonischen Räumen, das chromatische Kreismodell (rechts) die Halbtonverschiebung aufwärts in drei Stimmen.

Akkordverwandtschaften in freitonaler Musik

Erweitert man den kleinen Dur-Septakkord {C, E, G, B} in Grundstellung um weitere Terzen, so ist auch der kleine Dur-Septnonakkord {C, E, G, B, D} noch Teil des diatonischen Halbraums {B, F, C, G, D, A, E}. Die Hinzunahme der #11 {Fis}

gemäß der Obertonreihe führt erstmals zum Verlassen der Diatonik, die große Tredezime {A} ist hingegen wieder Teil der Diatonik. Das vertikale Total der akustischen Skala erfordert somit ein Kreisbogensegment mit Winkel 240° .

Erweitert man den kleinen Moll-Septakkord {D, F, A, C} in Grundstellung zunächst um die None {E}, dann die Undezime {G} und schließlich die Tredezime {H}, so erhält man schrittweise den kleinen Moll-Septnonakkord (Pentagon), den Moll-Undezimakkord (Hexagon) und schließlich einen diatonischen Siebenklang¹⁵, der den gesamten diatonischen Halbraum {F, C, G, D, A, E, H} ausfüllt und durch ein Heptagon repräsentiert wird. In {F, C, G, D, A, E, H} kann der Moll-Undezimakkord {D, F, A, C, E, G} als leitereigener Klang der II. Stufe verstanden werden und hat beispielsweise in einer II–V–I-Kadenz nach C-Dur eine funktionale Bedeutung. Derselbe Klang tritt allerdings auch in einem freitonalem Kontext auf: In Alban Bergs *Lyrischer Suite* für Streichquartett präsentiert die erste Geige im zweiten Takt des ersten Satzes eine Zwölftonreihe, die zugleich eine All-Intervall-Reihe darstellt (Abb. 11 und Abb. 12).

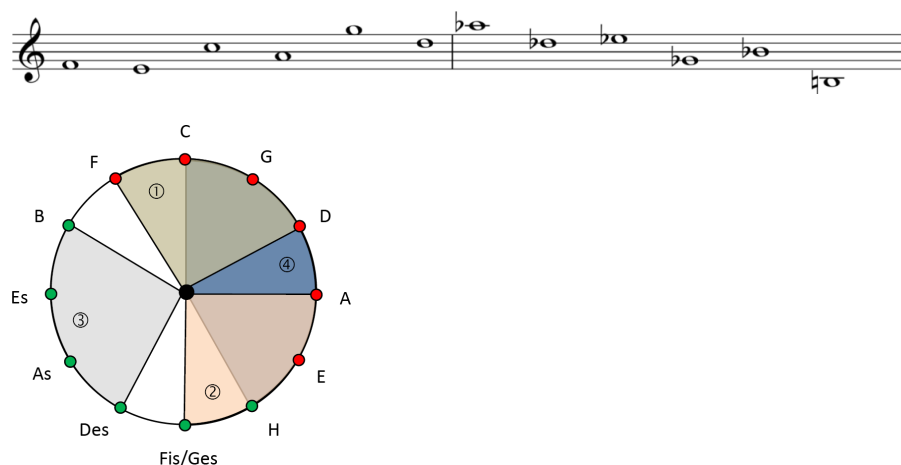


Abbildung 11: Zwölftonreihe in Bergs *Lyrischer Suite* mit Gliederung in zwei Hexaton-Vorräte (rote/grüne Punkte auf dem Kreisbogen). Die grün (①), gelb (②), grau (③) und blau (④) markierten Kreissektoren beziehen sich auf die vertikalen Schichtungen in Abb. 12. Mischfarben entstehen durch Überlappung.

15 Von Olivier Messiaen als ›Akkord auf der Dominante‹ (1935 im Vorwort des Orgelzyklus *La Nativité du Seigneur*) bezeichnet (vgl. Gárdonyi / Nordhoff 2002, 164).

Allegretto gioivale Alban Berg
(1885-1935)

♩=100

VI I

VI II

Vla

Vc

3

1. Gg. fortsetzend

poco f

Abbildung 12: Anfang der *Lyrischen Suite* von Alban Berg. Das zwölftönige Thema in Originalgestalt (Violine I) und vier verschiedene Quintschichtungen im Einleitungstakt, vgl. auch Abb. 11.

Teilt man den Tonvorrat mittig auf, so ergeben sich zwei 6-Ton-Sets, deren geometrisches Bild im diatonischen Kreismodell dem Hexagon des Moll-Undezimakkords gleicht. Zudem sind die Hexagone zu beiden Teil-Sets im geometrischen Bild um 180° gegeneinander verdreht (vgl. Abb. 11: rote und grüne Punkte auf dem Kreisbogen). Der Eindruck, dass Bergs Anfänge in der Zwölftontechnik ihre Wurzeln in der tonalen Musik haben, wird nun dadurch bekräftigt, dass Berg im Einleitungstakt des *Allegretto gioivale* insgesamt vier vertikale Schichtungen von Quinten, also Ausschnitte aus diatonischen Skalen, einander

gegenüberstellt. Kippmomente von einer diatonischen Sphäre in eine andere werden beispielsweise auch beim Übergang von Takt 11 zu Takt 12 besonders sinnfällig, siehe Abb. 13.

Abbildung 13: T. 11f. in Bergs *Lyrischer Suite*. Während T. 11 aus dem Tonvorrat des Hexatons {F, C, G, D, A, E} schöpft (rot), finden wir in T. 12 ausschließlich Töne des Hexatons {B, Es, As, Des, Ges, Ces} (grün). Man kann beim Taktwechsel das Umschalten zwischen zwei elementfremden Tonvorräten erleben.

Zusammenfassung

Hinsichtlich des Zusammenhangs zwischen diatonischen und nicht-diatonischen Skalen im *circular pitch-class space* wurde aufgezeigt, dass diatonische Räume im diatonischen Kreismodell durch Halbkreise dargestellt werden und der Fall »Moll mit Leitton« mit Blick auf solche Halbräume bereits eine signifikante Raumerweiterung erfordert, mithin auf eine Asymmetrie¹⁶ des Dur-Moll-Systems hinweist. Kadenzten können in diatonischen Räumen einen Grundton ausprägen. Werden Dreiklänge als kongruente Dreiecke im Kreismodell dargestellt, so konnte gezeigt werden, dass die Lage eines Dreiecks mit Blick auf diatonische Räume Auskunft über die Stabilität der zugehörigen Harmonie in einer Tonart gibt: Taucht ein Dreieck vollständig in einen diatonischen Halbraum ein und vertritt als Repräsentant der Tonart eine besonders stabile Harmonie? Berührt es Punkte der charakteristischen Dissonanz oder ist die charakteristische Dissonanz (im Fall von Vier-

¹⁶ »Although major and minor are for us routine musical facts [...] they reveal an intriguing ambiguity of construction if examined carefully.« (Harrison 1994, 23)

und Mehrklängen) als Ton-Set gänzlich eingeschlossen, so dass das Polygon einen instabilen Klang mit Auflösungstendenz zum tonalen Zentrum repräsentiert? Auch die relative Lage zweier diatonischer Räume wurde mit Blick auf Möglichkeiten der diatonischen Modulation diskutiert. Werden zwei Dreiklänge hinsichtlich der Zahl gemeinsamer Ecken oder Kanten oder einer gemeinsamen Diatonik verglichen, so wurde gezeigt, dass kein vollständig konsistenter Abstandsbegriff für Akkordpaare allein aus dieser Darstellung erwachsen kann, da auch andere Merkmale wie etwa Grundtonbeziehungen in einen Abstandsbegriff eingehen müssten. Dennoch: Auch geometrisch weit entfernte Dreiecke können beispielsweise eine Spiegelsymmetrie aufweisen und auf eine verbindende Wirkung der beiden Harmonien hinweisen. Schließlich wurde anhand mehrerer Beispiele die anschauliche Kraft der Visualisierung von Akkordverbindungen im *circular pitch-class space* demonstriert: Durch Möglichkeiten der Modulation mit einem symmetrischen Klang, durch Vergleich von tonartbezogenen Räumen in einem diatonischen Modell und Stimmfortschreitungen in einem chromatischen Modell, durch Strukturierung eines Tonraums in einem Beispiel mit einer Zwölftonreihe.

Verschiedene Erweiterungen der hier vorgestellten Modellierungen sind denkbar und sollen abschließend als Ausblick für weitere Überlegungen formuliert werden: Ein konsistenter Abstandsbegriff oder, umgekehrt formuliert, ein numerisches Maß für die kadenzierende Stärke einer Akkordverbindung wurde bisher noch nicht eingeführt. Die hier verwendeten Dreiecke sind lediglich Darstellungen des Tonvorrats eines Dreiklangs. Die Modellierung berücksichtigt aber noch nicht, welche Funktion ein Dreiklangston als Harmonieton hat. Entsprechend können Fragen zur Stimmfortschreitung (z.B. Strebetöne) oder der Stellung von Akkorden nicht beantwortet werden. Daran schließt sich die Frage nach der Unterscheidbarkeit von chromatischen und diatonischen Halbtonschritten an, die in Folge der Klassenbildung im *circular pitch-class space* nicht getrennt werden können. Ob die hier vorgeschlagene Art der Modellierung zur Beschreibung von Akkordfortschreitungen – unter Einbezug eines größeren Kontexts bzw. einer temporalen Betrachtung¹⁷ – dient, muss derzeit noch offenbleiben und als Fernziel angesehen werden.

17 Vgl. Fußnote 12.

Literatur

- Cohn, Richard (2012), *Audacious Euphony. Chromaticism and the Triad's Second Nature*, New York: Oxford University Press.
- Gárdonyi, Zsolt / Hubert Nordhoff (2002), *Harmonik*, Wolfenbüttel: Mösseler.
- Harrison, Daniel (1994), *Harmonic Function in Chromatic Music: A Renewed Dualist Theory and an Account of Its Precedents*, Chicago: The University of Chicago Press.
- Jabs, Ansgar / Pascal Rudolph (2019), »Visualisierung harmonischer Prozesse mithilfe des ›Circular Pitch-Class Space‹ am Beispiel der ›Tristan‹-Sequenz«, *ZGMTH* 16/2, 167–177. <https://www.gmth.de/zeitschrift/artikel/1016.aspx> (01.04.2023)
- Rameau, Jean-Philippe (1722), *Traité de l'harmonie réduite à ses principes naturels*, Paris: Ballard, Reprint Genève: Slatkine 1986.
- Rieke, Jakob (2019), »Cycling in Tonal Space. Neo-Riemannian Theory in der dritten Dimension«, *ZGMTH* 16/1, 41–65. <https://www.gmth.de/zeitschrift/artikel/1009.aspx> (01.04.2023)
- Schiltknecht, Dres (2011), »›Konstrukt‹ und ›Funktion‹. Eine Herleitung der Simonschen Tonfelder«, *ZGMTH* 8/2, 351–363. <https://www.gmth.de/zeitschrift/artikel/632.aspx> (01.04.2023)
- Schiltknecht, Dres (2015), »Zur Bedeutung von enharmonischer Äquivalenz«, in: *Musiktheorie und Komposition. XII. Jahreskongress der Gesellschaft für Musiktheorie Essen 2012* (GMTH Proceedings 2012), hg. von Markus Roth und Matthias Schlothfeldt, Hildesheim: Georg Olms Verlag, 373–386. <https://www.gmth.de/proceedings/artikel/162.aspx> (01.04.2023)
- Tymoczko, Dmitri (2011), *A Geometry of Music*, New York: Oxford University Press.

© 2025 Martin Kohlmann (info@martin-kohlmann.de)

Hochschule für Musik, Theater und Medien Hannover [Hanover University of Music, Drama and Media]

Kohlmann, Martin (2025), »Die Geometrie von Akkordverwandtschaften. Harmonik im *circular pitch-class space*«, in: *Tonsysteme und Stimmungen. 21. Jahreskongress der Gesellschaft für Musiktheorie* (GMTH Proceedings 2021), hg. von Moritz Heffter, Johannes Menke, Florian Vogt und Caspar Johannes Walter, 295–312. <https://doi.org/10.31751/p.331>

eingereicht / submitted: 13/04/2022

angenommen / accepted: 01/03/2023

veröffentlicht / first published: 01/09/2025

zuletzt geändert / last updated: 01/09/2025