

GMTH Proceedings 2021

herausgegeben von
Florian Edler und Immanuel Ott

Tonsysteme und Stimmungen

21. Jahreskongress der
Gesellschaft für Musiktheorie
Basel 2021

herausgegeben von
Moritz Heffter, Johannes Menke,
Florian Vogt und Caspar Johannes Walter



Die GMTH ist Mitglied von CrossRef.
<https://www.crossref.org>



Diese Ausgabe erscheint im Open Access und ist lizenziert unter einer
Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.



This is an open access volume licensed under a
Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Zooming into Chroma Spaces – Experimente in und zur Geschichte der Vieltönigkeit¹

Schon im 14. Jahrhundert wurde die Vermessung der Oktave mit kleineren Intervallen erprobt. Während die mehrfache Aneinanderreihung gleicher Intervalle, das heißt die Vervielfachung musikalischer Intervalle eine grundlegende Technik der musikalischen Arithmetik ist, bleibt die gleichmäßige Teilung musikalischer Intervalle in der pythagoreischen Proportionenlehre ontologisch problematisch. Selbst die Halbierung der einfachsten Intervalle führt über das pythagoreische Zahlenuniversum hinaus und direkt in die Irrationalität. Die drei Beiträge verbinden historische mit systematisch-mathematischen Ansätzen zum Topos *Vieltönigkeit* als Experimentierfeld für musiktheoretisches Denken. Dabei spielen Diagramme eine zentrale Rolle.

As early as the 14th century, the measurement of the octave by smaller intervals has been the subject of experimentation. While piling equal intervals (i.e., multiplying musical intervals by numbers) is a fundamental technique of musical arithmetic, the equal division of musical intervals remains ontologically problematic in the Pythagorean theory of proportions. Even the bisection of the simplest intervals leads beyond the Pythagorean universe of numbers and directly into irrationality. The three contributions combine historical with systematic-mathematical approaches to the topos of *Vieltönigkeit* as an experimental field for music-theoretical thinking. Here diagrams will play a central role.

SCHLAGWORTE/KEYWORDS: circularity; meantone tunings; mitteltönige Stimmungen; musical diagrams; musikalische Diagramme; Schritintervallmuster; step interval patterns; Vieltönigkeit; well-formedness; Wohlgeformtheit; Zirkularität

Prélude

Die hier vorgelegten historischen und systematischen Betrachtungen tragen verschiedene Erkenntnisinteressen an unseren musiktheoretischen Gegenstand – die Erschließung vieltöniger chromatischer Systeme auf Basis der jeweils historisch etablierten Tonsysteme und des jeweils verfügbaren musiktheoretischen Wissens – heran. Eine primäre Motivation für das Betreten des Grenzbereiches zwischen His-

1 Die Autoren möchten sich bei Johannes Walter und dem anonymen Begutachter für die sorgfältige Lektüre und die hilfreichen Kommentare bedanken.

torie und Systematik ist die Frage nach der Wissenschaftlichkeit sowohl der aktuellen als auch der historischen Ansätze – aus einem heutigen Wissenschaftsverständnis.

Der erste Teil (Daniel Muzzolini) ist ein Streifzug durch die Geschichte des musiktheoretischen Zoomens anhand von Bogendiagrammen, gefolgt von Überlegungen und computergestützten Experimenten zur iterativen Erzeugung vieltöniger Systeme und zur Approximation mitteltöniger Stimmungen durch gleichmäßige Oktavteilungen. Der zweite Teil (Michael Dodds) befasst sich im Detail mit zwei Volvelles (Drehscheiben) portugiesischer Theoretiker aus dem 17. und 18. Jahrhundert, welche – in Hinsicht auf eine zeitgenössische mitteltönige Stimmung – eine gleichmäßige 55er-Teilung der Oktave verwenden. Im dritten systematischen Teil (Thomas Noll) werden weiterführende Experimente zur rekursiven Erzeugung von Buchstabenpatterns und ihre Deutung als musikalisches Zoomen in die Vieltönigkeit² durchgeführt. Diese Prozesse der Worttheorie kommen auch in der Theorie der formalen Sprachen zur Anwendung, und Isaac Newton, der in seinen frühen noch wenig erforschten handschriftlichen Notizen zur Musiktheorie bereits Buchstabenkombinatorik betrieben hat, entpuppt sich vielleicht als unbekannte Wurzel dieser neuen systematischen Disziplin im Grenzgebiet zwischen Mathematik und Musiktheorie.

Part 1: Eintauchen in die Vieltönigkeit mit Diagrammen

Während für Nicole Oresme (14. Jh.) die geometrische Teilung von Intervallen aus einer kontinuierlichen Weltsicht unproblematisch ist, schlägt der Autor des anonymen *Compendium de musica* aus der gleichen Zeit ein pythagoreisches „Monochord aus lauter Kommata“³ vor, mit dem sich die zeitgenössischen musikalischen Skalen optimal vergleichen lassen. Dessen Oktave besteht aus 41 pythagoreischen Kommata und 12 etwas kleineren Intervallen.

- 2 Der Begriff „Vieltönigkeit“ wurde von Martin Kirnbauer (2015) als Alternative zu „Mikrotonalität/Microtonality“ vorgeschlagen. Der Begriff „Chroma“ bezieht sich auf Tonhöhen modulo Oktave, d. h. „pitch classes“/„Tonigkeiten“.
- 3 „monochordum ex puris videlicet commatibus“ (Anonymus 14. Jh., fol. 51r). Der Traktat aus dem 14. Jahrhundert stammt gemäß Joseph Smits van Waesberghe von Jacobus Leodiensis. Diese Zuschreibung ist nicht gesichert, vgl. Hentschel (2000, 268–270); Desmond (2000, 23–24). Die erhaltene Abschrift, B-Br 10162–66, stammt aus dem 15. Jahrhundert.

Die Einführung der Dezimalbrüche im ausgehenden 16. Jahrhundert und die Verbreitung der logarithmischen Rechentechniken ab dem frühen 17. Jahrhundert vereinfachen nicht nur die Vermessung des Himmels, sondern auch das Eintauchen in die musikalische Oktave. Zur Vermessung quint-/terzbasierter Stimmungen etwa schlägt Nicolaus Mercator ein mikrotonales „artifizielles Komma“ vor, das als 53. Teil der Oktave definiert ist. Etwa zeitgleich (1665) erforscht Isaac Newton mehrere gleichmäßige Unterteilungen der Oktave, darunter die 53er-Teilung und die 612er-Teilung.⁴ Anhand von noch wenig erforschten Diagrammen hauptsächlich aus mittelalterlichen Quellen beleuchten wir Wege des iterativen Eintauchens in vieltönige Strukturen.

Bogendiagramme und Tetraktys

Ein *Bogendiagramm* ist eine endliche ebene Konfiguration, bei der Paare von Punkten, die auch *Knoten* genannt werden, entlang einer gezeichneten oder gedachten Linie angeordnet sind. Knotenpaare können mit *Bögen* (häufig Halbkreisbögen) verbunden sein. Die Bögen symbolisieren Relationen und können beschriftet sein. Ein Bogendiagramm heißt *vollständig*, wenn alle möglichen Knotenpaare mit Bögen verbunden sind.

Bogendiagramme dienen typischerweise der Veranschaulichung von Zahlenverhältnissen und Proportionen. In der Musiktheorie pythagoreischer Prägung werden sie zur Beschreibung musikalischer Strukturen als geschlossene Systeme von Proportionen eingesetzt. Gleichzeitig sind sie Rechenhilfen für die Multiplikation und Division rationaler Zahlen. Manchmal stellen sie Anweisungen zur Stimmung von Saiteninstrumenten und Orgeln dar.

Unter *Tetraktys* verstehen wir hier eine Konstellation von vier Entitäten, die als vollständiges Bogendiagramm – mit vier Knoten und sechs Bögen – veranschaulicht werden kann.

4 Vgl. Muzzolini (2020); Noll (2020).

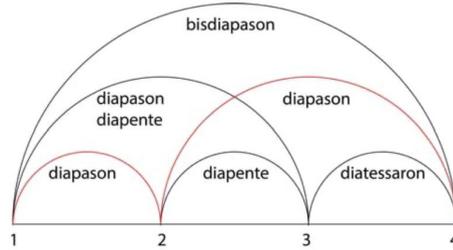
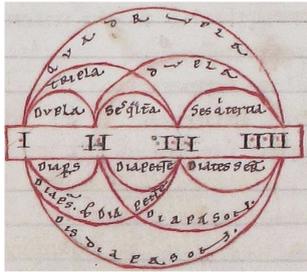


Abb. 1.1. Tetraktys der Zahlen Eins bis Vier. Quelle: Rudolfus de S. Trudone (?), *Questiones in Musica* (ca. 12. Jh.), D-Ds 1988, fol. 117r, Darmstadt, Hessische Landes- und Hochschulbibliothek.

Das in Abbildung 1.1 gezeigte Diagramm ist ein doppelt vollständiges Bogendiagramm: Die Bögen im oberen Teil charakterisieren die Zahlenverhältnisse zur Knotenmenge $\{1, 2, 3, 4\}$ über ihre mathematischen Namen, während der untere Teil die Namen der betreffenden musikalischen Intervalle angibt. Die Struktur enthält zwei äquivalente Verhältnisse, die Oktaven, $1 : 2$ und $2 : 4$. Die Durchmesser der zugehörigen Kreisbögen sind verschieden, da das Diagramm auf einer linearen Anordnung basiert, bei der gleiche (räumliche) Abstände gleichen (arithmetischen) Differenzen entsprechen. Im Gegensatz dazu visualisiert das in Abbildung 1.2 gezeigte Tetraktys-Diagramm gleiche musikalische Intervalle mit gleichgroßen Bögen. Dieses Diagramm hat Heinrich Loriti Glareanus (1488–1563) in den Rand einer in seinem Besitz befindenden Abschrift von Guido von Arezzos *Micrologus* von ca. 1200 gezeichnet.⁵

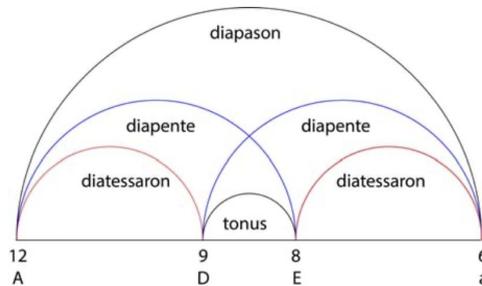
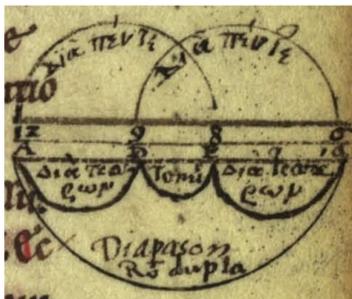


Abb. 1.2. Diagramm zur Ableitung des Ganztons aus den perfekten Konsonanzen der Oktave, Quinte und Quarte. Quelle: Guido von Arezzo, D-Mu 8° Cod. Ms. 375 (Cim 13), fol.53r, München, Universitätsbibliothek.

⁵ Glareanus besaß eine umfangreiche Sammlung mittelalterlicher Handschriften, vgl. Groote & Eysholdt (2010).

In dieser Darstellung der Zerlegung der Oktave durch die Proportion

$$12 : 9 : 8 : 6$$

haben gleiche Intervalle gleiche Durchmesser, die in etwa ihre (logarithmisch gedachten) Größenverhältnisse wiedergeben. Der Addition von musikalischen Intervallen entspricht die Verkettung benachbarter Bögen zu umfassenden Bögen. Dabei addieren sich auch die Durchmesser der Halbkreisbögen. Die Quinte (*diapente*) ist gleich einer Quarte (*diatessaron*) plus ein Ganzton (*tonus*), und am Diagramm lässt sich ablesen, dass die Reihenfolge der beiden Summanden für das Ergebnis keine Rolle spielt:

$12 : 9 : 8$	$12/8 = 3/2$	eine Quarte gefolgt von einem Ganzton
$9 : 8 : 6$	$9/6 = 3/2$	ein Ganzton gefolgt von einer Quarte

Die griechischen Tetrachorde und Skalen werden gebildet, indem je zwei weitere Töne in die Quartan als Rahmenintervalle eingefügt werden. Eine einfache Rechnung zeigt, dass die Quarte ($4/3$) größer als zwei, aber kleiner als drei Ganztöne ($9/8$) ist. Daraus ergeben sich der Spezialfall des diatonischen Tetrachords und die diatonische Skala mit nur zwei verschiedenen großen Stufenintervallen. In historischen Definitionen wird das diatonische Tetrachord, das aus zwei Ganztönen T und dem Ergänzungsintervall s zur Quarte besteht, gewöhnlich asymmetrisch mit den beiden Ganztönen oben (s-T-T) wiedergegeben, vgl. Abb. 1.3.⁶

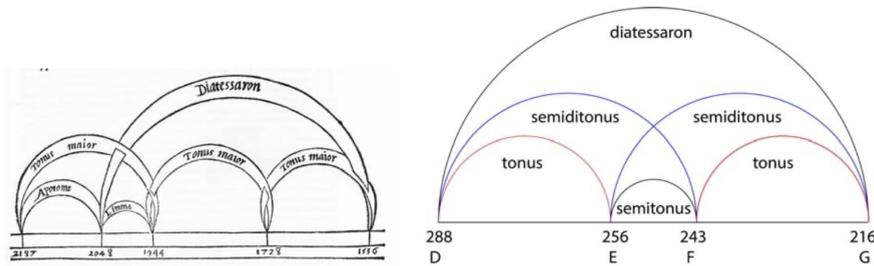


Abb. 1.3. Links: Erklärung pythagoreischer Intervalle in *De musica libri septem* von Francisco Salinas. Die angegebenen Saitenlängen passen zu Skalenabschnitten wie Es, E, F, G, A bzw. B, H, C, D, E. Der Ganzton (2187/1944) wird durch 2048 ungleich in einen größeren chromatischen Halbton (*Apotome*) und einen kleineren diatonischen Halbton (*Limma*) zerlegt. Quelle: Salinas (1577, 79). Rechts: symmetrisches pythagoreisches Tetrachord mit dem diatonischen Halbton (*Limma*) in der Mitte.

6 Die griechischen Tetrachorde sind generell so aufgebaut, dass die kleinsten Intervalle unten liegen.

Geometrische Halbierung der Tetraktys bei Nicole Oresme

In dem in Abb. 1.4 gezeigten Diagramm von Nicole Oresme stehen die Knoten für den Durchmesser eines Kreises und die Seiten der einbeschriebenen regelmäßigen 3-, 4- und 6-Ecke.

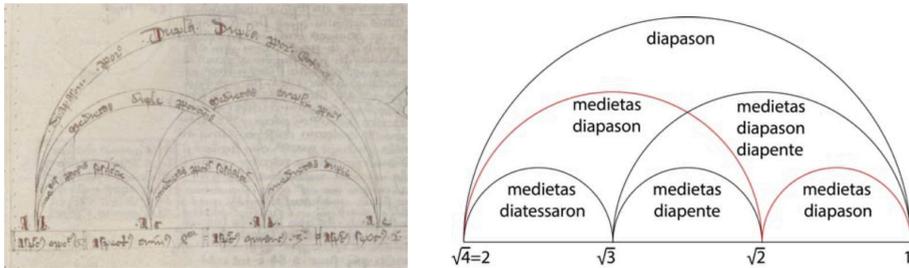


Abb. 1.4. Nicole Oresmes geometrische Halbierung der Tetraktys $1 : 2 : 3 : 4$. Quelle: *Algorismus proportionum*, Hs. F II 33, fol. 98v, Basel, Universitätsbibliothek.

Mit seinen gleichmäßig angeordneten Knoten sieht es wie ein gewöhnliches Tetraktys-Diagramm für $X = \{1, 2, 3, 4\}$ aus. Im Vergleich dazu sind aber alle Intervalle halbiert. Der größte Bogen beschreibt eine halbe Doppeloktave, das heisst eine Oktave (*diapason*). Alle andern Intervalle bilden irrationale Verhältnisse. Die halbierte Oktave im Verhältnis $\sqrt{2:1} = \sqrt{2}$ (*medietas diapason*), kommt, wie die Oktave in X , zweimal vor. Sie entspricht dem Tritonus der modernen gleichstufigen Stimmung (12-EDO). Das Diagramm erklärt die Quadratwurzelfunktion der Verhältnisse über X . Musikalisch gesehen ist es die halbierte klassische Tetraktys. In dieser Erweiterung des pythagoreischen Intervallsystems ist die Summe einer halbierten Oktave und einer halbierten Quinte eine halbierte Duodezime:

$$\sqrt{3/2} \times \sqrt{2} = \sqrt{3} : \text{medietas diapente} + \text{medietas diapason} = \text{medietas (diapason + diapente)}$$

Die Addition musikalischer Intervalle ist terminologisch gesehen weitgehend unabhängig von der zugrundeliegenden Stimmung: In Bezug auf 12-EDO misst eine halbierte Quinte $3\frac{1}{2}$ Halbtöne und eine halbierte Quarte $2\frac{1}{2}$ Halbtöne. Zusammen bilden sie eine halbierte Oktave mit $3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = 6$ Halbtönen. Im System von Oresme steht die Formel

$$\sqrt{4/3} \times \sqrt{3/2} = \sqrt{2}$$

für eine etwas andere Aufteilung desselben Tritonus in eine halbierte *pythagoreische* Quarte und eine halbierte *pythagoreische* Quinte.⁷

Laut Maximilian Curtze, der im 19. Jahrhundert Oresmes *Algorismus Proportionum* zum ersten Mal publizierte, war Oresme wahrscheinlich der erste, der die Rechengesetze für Potenzen mit ganzen und gebrochenen Exponenten formal beschrieb, zwei Jahrhunderte vor Michael Stifel (1544).⁸ Er benutzte auch den Bruchstrich und die uns vertraute Notation für unechte Brüche als gemischte Zahlen. Bemerkenswerterweise unterscheiden sich die mathematische und die musikalische Terminologie im 14. Jahrhundert noch kaum, sodass Oresme musikalische Intervallbezeichnungen verwendet, um die Flächenverhältnisse und Seitenverhältnisse der regelmäßigen Vielecke am Einheitskreis zu charakterisieren.⁹ Musikalische Intervallnamen ersetzen hier mathematische Formeln, für deren Formulierung es noch keinen verbindlichen mathematischen Formalismus mit zugehöriger Notation gibt.

Teilung des Ganztons und vieltönige Monochorde

Das in Abb. 1.5 gezeigte Diagramm aus dem anonymen *Compendium de musica* unterteilt den Ganzton symmetrisch in zwei *Limmata* (pythagoreische Halbtöne: 256/243) und ein *pythagoreisches Komma* (531'441/524'288). Die herzförmige Darstellung verwendet gleiche Durchmesser für die chromatischen Halbtöne (*Apotome*: 2187/2048), das zentrale Komma jedoch ist unverhältnismäßig groß dargestellt. Vermutlich hat die Beschriftung den Schreiber davon abgehalten, die wahren Größenverhältnisse wiederzugeben: Schon Boethius wusste, dass das Limma deutlich mehr als drei und etwas weniger als vier Kommata misst, und der Verfasser des Traktats war mit diesen Schätzungen vertraut. Die wesentlichen Strukturmerkmale kommen dennoch klar zum Ausdruck: Der Ganzton ist wie die Doppeloktave und die Oktave symmetrisch – in Form eines Tetraktys-Diagramms – in kleinere pythagoreische Intervalle zerlegt.

7 Die halbierte gleichstufige und die halbierte pythagoreische Quarte unterscheiden sich um etwa 1 Cent.

8 Curtze (1868, 9–10).

9 Siehe Muzzolini (2021).

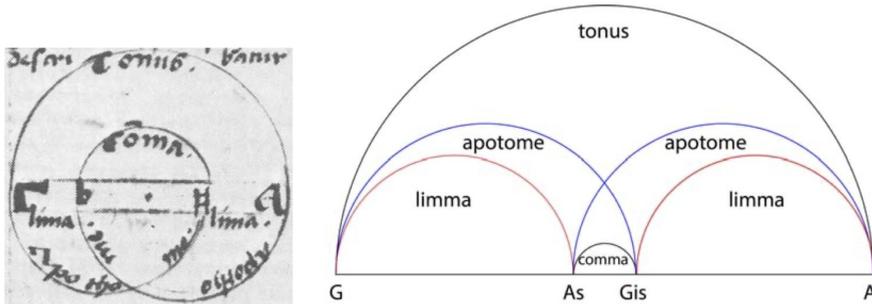


Abb. 1.5. Symmetrische Aufteilung des pythagoreischen Ganztons ($9/8$) in zwei Limmata und ein Komma. Quelle: Anonymus (14. Jh., fol. 50v).

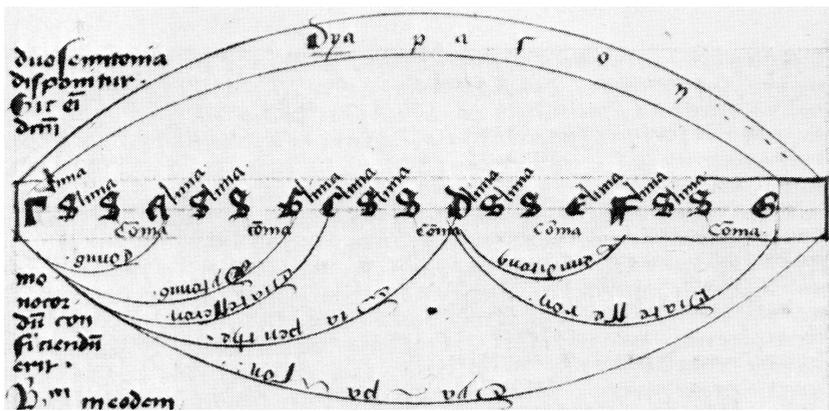


Abb. 1.6. Aufteilung der Oktave (Γ -G) in 17 Intervalle, 12 Limmata und fünf Kommata. Quelle: Anonymus (14. Jh., fol. 51r).

Der Autor des Traktats wendet die Zerlegung des Ganztons in zwei Limmata und ein Komma auf alle fünf Ganztöne der diatonischen Skala an und erhält so ein System mit 17 Tonhöhen pro Oktave, vgl. Abb. 1.6. Merkwürdigerweise teilt er die Ganztöne nicht symmetrisch wie in dem in Abb. 1.5 gezeigten Diagramm, sodass sein System nicht Alternativen zwischen enharmonisch aufeinander bezogenen einfach alterierten Töne wie Gis und As bietet, sondern „verminderte kleine Untersekunden“ zu diatonischen Haupttönen. Diese Inkonsistenz ist möglicherweise durch die arabische *Kitab al-Adwar* beeinflusst, die eine entsprechende Unterteilung der Oktave mit 17 Tonhöhen schon um die Mitte des 13. Jahrhunderts be-

Stimmung, die Differenz zwischen dem kleinen Ganzton und dem diatonischen Halbton, nur 3 Einheiten beträgt. In diesem feinkörnigen System sind das pythagoreische und das syntonische Komma gleich groß: 1 Einheit. Da 53 eine Primzahl ist, bilden alle Intervalle maximale Zyklen modulo Oktave. Jedes Intervall, das größer als der Einklang ist, erzeugt demnach das vollständige System.¹⁶ Zum Beispiel ergibt die Aneinanderreihung von großen Terzen (17 Einheiten) den folgenden geschlossenen Zyklus der Länge 53:

$$0, 17, 34, 51, 68 = 15, 32, 49, 66 = 13, \dots, 19, 36, 53 = 0$$

Mercators handschriftlich überlieferte Oktaveinteilung wurde von William Holder (1616–1698) schon im 17. Jahrhundert kommentiert, während Newtons frühe Manuskripte zur Musiktheorie erst ab dem späten 20. Jahrhundert näher untersucht wurden.¹⁷

Schichtungen von Tetrachorden und Hexachorden

Das pythagoreische Tonsystem wird von zwei kongruenten Oktaven umrahmt, die je in einen Ganzton und zwei Quarten unterteilt sind. Der Rahmen kann durch die Saitenlängenproportion

$$36 : 32 : 24 : 18 : 16 : 12 : 9$$

beschrieben werden. Darin wechseln sich verbundene und durch einen Ganzton getrennte Quarten ab. Dieses Gerüst ist in Abb. 1.9 auf der linken Seite als Bogendiagramm angegeben. Die Heptatonik ergibt sich, indem die Quarten durch zwei innere Töne zu Tetrachorden erweitert werden. Die Gattungen der Tetrachorde – diatonisch, chromatisch und enharmonisch – sind durch spezifische Positionen der beiden inneren Töne charakterisiert. Die Intervalle müssen in jedem Tetrachord gleich angeordnet sein, sodass korrespondierende Töne in benachbarten Tetrachorden reine Quarten bzw. Quinten bilden. In Abb. 1.9 ist das pythagoreische diatonische System dargestellt, dessen Tetrachorde durch ein Limma (*semitonium minus*) und zwei Ganztöne definiert sind.

¹⁶ Im gleichstufigen 12er-System hingegen bilden nur der Halbton, die Quarte, die Quinte und die grosse Septime maximale Zyklen der Länge 12.

¹⁷ Holder (1731, 79–80); Lindley (1987, 206–210); Muzzolini (2020). Die musiktheoretischen Manuskripte von Nicolaus Mercator und Isaac Newton sind in Wardhaugh (2013, 85–236) veröffentlicht.

Das vollständige System verfügt über ein fünftes Tetrachord (*Tetrachordon synemmenon*), das über die Heptatonik hinausweist. Es ist in Abb. 1.9 auf der rechten Seite angegeben. Bei seiner Integration zerfällt die kleine Terz zwischen a und c symmetrisch in ein Apotome und zwei Limmata ($a-b-\frac{1}{4}-c$), sodass die obere Oktave einen Ton mehr als die untere hat. Der gleiche Unterschied tritt auch im System der sieben Hexachorde auf. Glareans Synopsis interpretiert das System der mittelalterlichen Hexachorde als natürliche Erweiterung des pythagoreischen Systems.

Die drei Tetrachorde (*hypaton*, *meson* und *synemmenon*) bilden eine kurze Kette verbundener Tetrachorde. Die darin angelegte Quartperiodizität generiert bei ihrer Weiterführung modulo Oktave beliebig viele neue Töne und gibt Anlass zu verfeinerten Tonsystemen. Dieser wenig erforschte Weg zu vieltönigen Systemen soll hier kurz thematisiert werden.

Durch lückenlose Aneinanderreihung pythagoreischer diatonischer Tetrachorde erhält man nicht nur die chromatische Skala mit 12 Tonhöhen (7 verbundene Tetrachorde), sondern auch die oben beschriebene 17er-Teilung (12 verbundene Tetrachorde) und das „vieltönige Monochord“ mit 53 Tonhöhenklassen (48 verbundene Tetrachorde), vgl. Abb. 1.10. Das liegt daran, dass ab dem dritten Tetrachord mit jedem weiteren Tetrachord immer genau ein Ton im Abstand einer reinen Quarte hinzukommt. Ganz ähnlich verhält es sich bei der Aneinanderreihung von pythagoreischen chromatischen Tetrachorden. Hier wird die 12-tönige chromatische Skala bereits mit 5 verbundenen Tetrachorden erreicht, vgl. Abb. 1.11.

Die Erzeugung vieltöniger Systeme durch iterative Verkettung kongruenter Tonhöhenstrukturen ist nicht an Tetrachorde gebunden. Die Resultate hängen von der Größe der rahmenden Intervalle und der Verteilung der inneren Töne ab. Rahmenintervalle mit rationalem Frequenzverhältnis bringen immer unendliche Mengen von Tonhöhenklassen hervor, wenn die Iteration beliebig weitergeführt wird. Umgekehrt werden endliche Systeme mit irrationalen Frequenzproportionen erkaufte.¹⁸ Beispielsweise generiert das Trichord (15 : 16 : 18), das die kleine reine Terz (6/5) in einen Halbton und einen Ganzton zerlegt, ein unendliches System, während sein Pendant in der gleichstufigen 12er-Skala auf den zweiten Modus von Messiaen führt.

¹⁸ Endliche Systeme entstehen genau dann, wenn der 2er-Logarithmus des Rahmenintervalls rational ist, d. h. wenn die Größe des Rahmenintervalls zur Oktave kommensurabel ist.

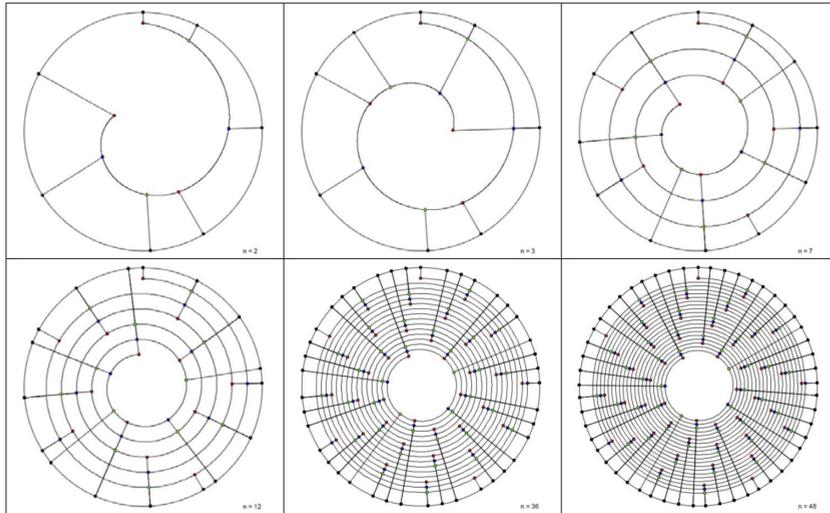


Abb. 1.10. Verkettung diatonischer Tetrachorde (Limma, Tonus, Tonus) zur Proportion $243 : 256 : 288 : 324$ modulo Oktave. Die verketteten Tetrachorde verlaufen auf nach innen gerichteten Spiralen. Der zugehörige Tonvorrat ist auf den umschließenden Oktavkreis projiziert. Der Tonvorrat für $n = 48$ verkettete Tetrachorde ist von Auge kaum von einer gleichmäßigen 53er-Teilung der Oktave zu unterscheiden.

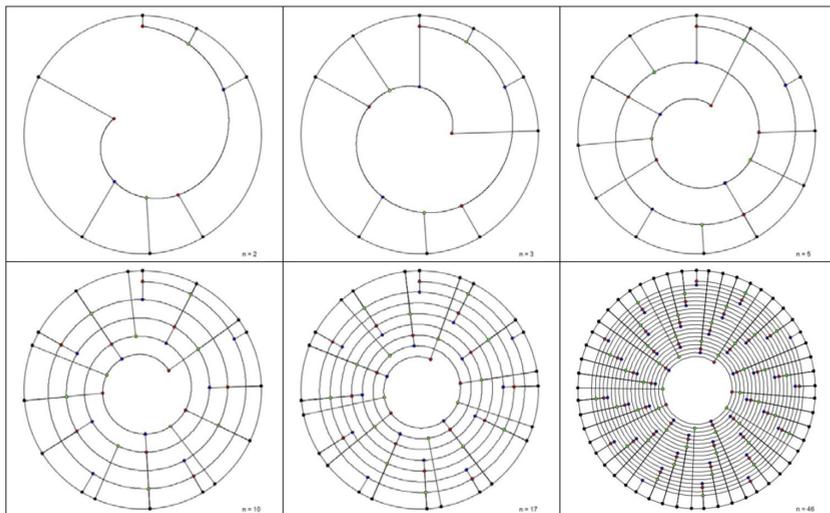


Abb. 1.11. Verkettung chromatischer Tetrachorde (Limma, Apotome, Semiditonus) zur Proportion $1944 : 2048 : 2187 : 2592$. Bei diesem Prozess ergeben 5 Tetrachorde eine pythagoreische chromatische Skala mit 12 Tonhöhen. Für Werte $n > 4$ ergeben n Tetrachorde $n + 7$ verschiedene Tonhöhen, sodass 10 und 46 Tetrachorde die pythagoreischen Systeme mit 17 und 53 Tönen ergeben.

Anders als die pythagoreischen Tetrachorde lassen sich die guidonischen Hexachorde als Verkettung von Quarten interpretieren: Der Skalenanordnung C–D–E–F–G–A entspricht die Quartenkette E–A–D–G–C–F. Verbindet man das Hexachord auf C mit demjenigen auf A, A–H–Cis–D–E–Fis, kommen drei Töne, H, Cis und Fis, hinzu, und die Vereinigung lässt sich als Quartkette Cis–Fis–H–E–A–D–G–C–F schreiben. Dementsprechend definieren drei verbundene Hexachorde bereits eine 12-stufige Chromatik. Da mit jedem weiteren Hexachord drei Töne hinzukommen, können die Systeme mit 17 und 53 Tönen nicht als Verkettungen von verbundenen Hexachorden auftreten, vgl. Abb. 1.12.

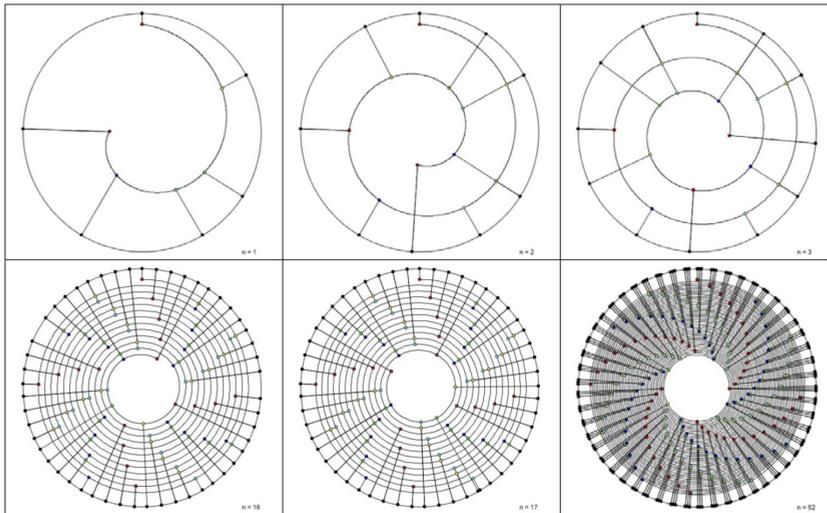


Abb. 1.12. Verkettung (verbundener) guidonischer Hexachorde. 3 pythagoreisch gestimmte Hexachorde führen auf eine chromatische Skala mit 12 Tonigkeiten, während 17 Hexachorde ein System mit 54 Tonigkeiten ergeben, in welchem zwei Tonhöhen sehr nahe beieinander liegen.

Das guidonische System kann aus der Überlagerung dreier quartversetzter Hexachorde (*mollis*, *naturalis* und *duris*) und mit Oktavtranspositionen erklärt werden. Historisch vollzog sich die Erweiterung seines Tonvorrats durch Umfunktionierung von Stammtönen zu *mi* oder *fa* eines geeigneten transponierten Hexachords. Beispielsweise führt die Deutung des Tones D als *mi* auf das Hexachord B–C–D–Es–F–G und die Deutung von D als *fa* auf das Hexachord A–H–Cis–D–E–Fis. Die Erklärung mittels iterierter Quarttranspositionen stand dabei nicht im Vordergrund.¹⁹

¹⁹ Umfassende Hexachordsysteme mit 12 Tönen pro Oktave wurden im anonymen Berkeley Manuscript (ca. 1375) und von Domingo Marcos Durán (1492) beschrieben und mit Kreisdiagrammen veranschaulicht, vgl. <https://digioll.lib.berkeley.edu/record/229570>; <https://sound-colour-space.zhdk.ch/diagrams/602> (23.7.2023).

53-EDO versus 55-EDO: reine Intonation versus mitteltönige Stimmung?

Die Aufwertung der Terzen als Konsonanzen mit kleinen Zahlenverhältnissen spätestens ab dem 15. Jahrhundert führte zu verschiedenen Formen der mitteltönigen Temperierung und ihren geschlossenen Näherungen. Die 1/4-Komma-mitteltönige Temperierung²⁰ beispielsweise wird aus Quinten erzeugt, die um den vierten Teil eines syntonischen Kommas kleiner sind als die pythagoreischen Quinten. Vier gestapelte Quinten dieser Art übertreffen zwei Oktaven um genau eine reine große Terz (5/4). Zwei Quinten minus eine Oktave ergeben daher einen Ganzton, der genau in der Mitte zwischen dem großen Ganzton (9/8) und dem kleinen Ganzton (10/9) liegt. Aus sechs Quinten ergibt sich eine diatonische Skala mit fünf einheitlichen Ganztönen und zwei diatonischen Halbtönen, und aus elf Quinten ergibt sich eine chromatische Skala, deren diatonische Halbtöne größer als die chromatischen Halbtöne sind.

Zielt man zur approximativen Darstellung dieser Temperierung auf eine gleichmäßige Teilung der Oktave mit ähnlich großen Intervallen wie bei 53-EDO ab, so ergibt sich mit neun Einheiten für den Ganzton und fünf Einheiten für den diatonischen Halbton in konsistenter Weise 55-EDO ($5 \times 9 + 2 \times 5 = 55$).²¹ Reduziert man darin alle zwölf Schritintervalle um je eine Einheit, erhält man 43-EDO ($5 \times 7 + 2 \times 4 = 43$), und reduziert man sie um zwei Einheiten gegenüber 55-EDO, gelangt man zu einer von Nicola Vicentino (1511–1576)²² und Christiaan Huygens (1629–1695) angegebenen Zerlegung der Oktave in 31 Teile ($5 \times 5 + 2 \times 3 = 31$).

Wir haben die gebräuchlichen homogenen Temperierungen einem computergestützten Zooming unterworfen, das deren approximative Darstellungen durch vieltönige gleichstufige Skalen ermittelt und bewertet. Die Resultate sind in Tabelle 1 zusammengestellt.

Mit der Kommatemperierung t als Input berechnet das Computerprogramm die Frequenzproportion der temperierten diatonischen Skala (jeweils erste Zeile). Beginnend mit $n = 7$ folgt nun ein Zoomen durch alle gleichmäßigen Oktavteilungen (EDOs). Für jeden Wert von n ermittelt der Algorithmus die zur Skala passende n -EDO-Darstellung, ein Maß für die Qualität dieser Darstellung in Form einer relativen

20 Die Brüche in den Bezeichnungen der homogenen temperierten Stimmungen geben an, um welchen Teil eines syntonischen Kommas (81/80) die erzeugenden Quinten im Vergleich zu den pythagoreischen Quinten (3/2) verkleinert sind.

21 Barbour (1951, 125–126).

22 Vgl. Wild (2014).

Abweichung (*rel dev*)²³ und die entsprechenden Cent-Abweichungen²⁴ (*cent dev*) von der zu approximierenden Skala. Die Darstellung wird in die Auswahlliste aufgenommen, wenn ihre relative Abweichung kleiner ist als diejenigen für alle kleineren Werte von n . Aufgrund dieses Auswahlkriteriums nehmen die Werte in der Spalte *rel dev* (für jeden festen Wert von t) ab. Die im Laufe des Zoomens ausgewählten Skalen stellen Sequenzen lokal optimaler Darstellungen mit zunehmender Qualität dar. Die vom Programm bestimmten Auswahllisten werden in Tabelle 1 spätestens mit der ersten Zahl $n > 1000$ abgebrochen. Es ist eine offene Frage von theoretischem Interesse, ob die Qualität der Approximation durch Weiterzoomen beliebig verbessert werden kann, ob also die ermittelten Auswahllisten unendlich lang werden oder nicht.²⁵

Die Darstellung der 1/3-Kommatemperierung durch 19-EDO ist äußerst genau, sie wird erst durch 1266-EDO übertroffen (alle Werte von n zwischen 19 und 1266 liefern größere relative Abweichungen). 19-EDO tritt auch bei den Darstellungen der 2/7- und bei der 1/4-Kommatemperierung in Erscheinung, dort aber mit viel größeren Abweichungen. 31-EDO kommt bei $t = 1/4$ und bei $t = 1/5$ vor, wobei die Abweichung bei $t = 1/4$ kleiner ausfällt. Für $t = 2/7$ bietet sich $n = 50$ an²⁶, und für $t = 1/6$ kommen $n = 55$ und $n = 67$ in Frage. Äußerst genau ist die Darstellung der 1/5-Kommatemperierung durch 43-EDO. Zum Vergleich sind auch die Berechnungen für die pythagoreische Stimmung ($t = 0$) und reine Stimmung angegeben, die 53-EDO begünstigen. Alle vom Algorithmus ausgewählten Oktavteilungen ergeben konsistente Darstellungen, in denen die Ganztöne und die diatonischen Halbtöne einheitliche Größen haben. Für die hervorgehobenen EDO-Darstellungen sind ihre Werte unter S und T separat angegeben.

Die Anwendung des Verfahrens auf chromatische Skalen mit zwölf Tönen ergibt für alle untersuchten temperierten Skalen die gleiche Auswahl an optimalen EDO-Darstellungen, ebenso für feinere Skalen mit bis zu 19 Tönen (18 geschichtete temperierte Quinten). Interessanterweise ergeben sich die gleichen Bewertungen auch dann, wenn nur die generierende temperierte Quinte mit der Oktave abgeglichen

23 Sie ist als rms-Abweichung gemessen in n -EDO-Einheiten definiert (rms = root mean square deviation: Die Quadratwurzel der gemittelten quadrierten Abweichungen ist ein häufig eingesetztes Maß zur Vergleichung von Datenreihen). Das Bewertungsverfahren eignet sich für beliebige Skalen und kam in Muzzolini (2020, 236–237) für syntonische Stimmungen zur Anwendung.

24 1 Cent ist der 100. Teil eines gleichstufigen Halbtons. Die Oktave misst also 1200 Cent.

25 Der Fall, dass sich beim Weiterzoomen nur noch die Cent-Abweichungen vermindern, aber keine weiteren Minima der relativen Abweichungen mehr auftreten, ist nicht a priori auszuschließen.

26 50-EDO passt wesentlich besser zur 3/11-Kommatemperierung (nicht in Tabelle 1 dargestellt).

wird. Mit andern Worten hat die Länge der untersuchten Ketten temperierter Quinten keinen Einfluss auf ihre optimalen Darstellungen durch gleichstufige vieltönige Systeme. Die sukzessive Reduktion der relativen Abweichungen führt also zu einer robusten Auswahl von Kandidaten vieltöniger gleichstufiger Stimmungen zur Darstellung temperierter Skalen.

t = 1/3	1	1.115722	1.244835	1.338866	1.493802	1.666667	1.859536	2	rel dev	cent dev	S	T
n = 7	0	1	2	3	4	5	6	7	0.1616727	27.71532		
n = 12	0	2	4	5	7	9	11	12	0.1592826	15.92826		
n = 19	0	3	6	8	11	14	17	19	0.0023897	0.150929	2	3
n = 1266	0	200	400	533	733	933	1133	1266	0.0015507	0.00147		

t = 2/7	1	1.117042	1.247783	1.338074	1.494685	1.669627	1.865044	2	rel dev	cent dev	S	T
n = 7	0	1	2	3	4	5	6	7	0.1799215	30.84369		
n = 12	0	2	4	5	7	9	11	12	0.127999	12.7999		
n = 19	0	3	6	8	11	14	17	19	0.0519222	3.279296		
n = 50	0	8	16	21	29	37	45	50	0.024155	0.57972	5	8
n = 119	0	19	38	50	69	88	107	119	0.0036155	0.036459		
n = 764	0	122	244	321	443	565	687	764	0.0024786	0.003893		
n = 883	0	141	282	371	512	653	794	883	0.0011495	0.001562		

t = 1/4	1	1.118034	1.25	1.337481	1.495349	1.671851	1.869186	2	rel dev	cent dev	S	T
n = 7	0	1	2	3	4	5	6	7	0.1936119	33.19061		
n = 12	0	2	4	5	7	9	11	12	0.1045296	10.45296		
n = 19	0	3	6	8	11	14	17	19	0.0890826	5.626272		
n = 31	0	5	10	13	18	23	28	31	0.0154471	0.597952	3	5
n = 174	0	28	56	73	101	129	157	174	0.0118428	0.081675		
n = 205	0	33	66	86	119	152	185	205	0.0036015	0.021082		
n = 789	0	127	254	331	458	585	712	789	0.0010482	0.001594		

t = 1/5	1	1.119424	1.25311	1.33665	1.496278	1.674969	1.875	2	rel dev	cent dev	S	T
n = 7	0	1	2	3	4	5	6	7	0.2127759	36.47586		
n = 12	0	2	4	5	7	9	11	12	0.0716775	7.167747		
n = 31	0	5	10	13	18	23	28	31	0.0694211	2.687268		
n = 43	0	7	14	18	25	32	39	43	0.0022554	0.062941	4	7
n = 1321	0	215	430	553	768	983	1198	1321	0.0017509	0.00159		

t = 1/6	1	1.120351	1.255187	1.336097	1.496898	1.677051	1.878886	2	rel dev	cent dev	S	T
n = 7	0	1	2	3	4	5	6	7	0.2255499	38.66569		
n = 12	0	2	4	5	7	9	11	12	0.049779	4.977901		
n = 55	0	9	18	23	32	41	50	55	0.0264354	0.576773	5	9
n = 67	0	11	22	28	39	50	61	67	0.0233443	0.418107	6	11
n = 122	0	20	40	51	71	91	111	122	0.0030898	0.030391		
n = 921	0	151	302	385	536	687	838	921	0.0017235	0.002246		

t = 0	1	1.125	1.265625	1.333333	1.5	1.6875	1.898438	2	rel dev	cent dev	S	T
n = 7	0	1	2	3	4	5	6	7	0.2894278	49.6162		
n = 12	0	2	4	5	7	9	11	12	0.0597259	5.972593		
n = 41	0	7	14	17	24	31	38	41	0.0505222	1.478699		
n = 53	0	9	18	22	31	40	49	53	0.0092048	0.20841	4	9
n = 306	0	52	104	127	179	231	283	306	0.004506	0.017671		
n = 665	0	113	226	276	389	502	615	665	2.02E-04	3.64E-04		

just int	1	1.125	1.25	1.333333	1.5	1.666667	1.875	2	rel. dev	cent dev
n = 7	0	1	2	3	4	5	6	7	0.2099931	35.99882
n = 12	0	2	4	5	7	9	11	12	0.0993751	9.937508
n = 53	0	9	17	22	31	39	48	53	0.0441108	0.998735
n = 118	0	20	38	49	69	87	107	118	0.0308231	0.313455
n = 559	0	95	180	232	327	412	507	559	0.0306319	0.065757
n = 612	0	104	197	254	358	451	555	612	0.0145293	0.028489

Tabelle 1. Annäherung der diatonischen Skala in mitteltönigen Stimmungen (1/3-, 2/7-, 1/4-, 1/5- und 1/6-Kommatemperierung) sowie pythagoreischer und reiner Stimmung durch gleichmäßige Teilungen der Oktave. Der Algorithmus optimiert die relativen Abweichungen bezüglich Feinheit der Teilung.

Part 2: Circulation and transposition in Portuguese Baroque theory: The 55-EDO transposition volvelles of Fernandez (1626) and Vaz Barradas (1735)

An essential element of the transition from modes to keys is the shift from vocal to keyboard ways of conceptualizing tonal space. This includes a shift from the ladder-like diatonic gamut to the circle of fifths as the dominant background construct for mapping and navigating tonal space, as well as from the monochord to the keyboard of 12 notes to the octave as the primary physical referent. A mathematical corollary of this shift is a passage from fractional generation of intervals and scales to logarithmic ones.

From antiquity through the Renaissance, circles served many speculative purposes, but rarely do they concern *musica practica*. By contrast, Baroque musical circles stand out for their practical orientation, and even for their mathematical specificity – a development that intersects with the scientific revolution in important ways. Moreover, in their visual vocabulary, they often suggest the influence of other spatial and temporal disciplines. This is very much the case in the work of two Portuguese Baroque music theorists whose graphic representations of circular tonal space we will consider here.

Especially intense expressions of circularity are volvelles, revolving paper wheels that permit two or more data constructs to be related dynamically. In the early modern era, volvelles were common in books belonging to applied mathematical disciplines including astronomy, navigation, cartography, chronometry, horology, surveying, and engineering. In music, volvelles can uniquely demonstrate the mapping of intervallic or scalar patterns onto the chromatic keyboard. Their adoption by Baroque music theorists reflects the influence of the scientific revolution and the age of exploration. Musical volvelles singularly manifest an epochal shift away from linear and

vocal ways of conceptualizing tonal space in medieval and Renaissance modality toward circular, keyboard-oriented, major-minor tonality.

In representing tonal space, early modern music theorists used circles and volvelles in ways we might classify as diatonic, chromatic, and enharmonic. Diatonic circularity is particularly associated with octave equivalence and solmization. Chromatic circularity, especially when reflecting microtonal divisions of the octave, illuminates the development of circulating keyboard temperaments. Circles that demonstrate enharmonic equivalence within a twelve-fold division of the octave also embody the mapping of vocal modality onto the keyboard, a critical step in the emergence of the circle of fifths as a tool for mapping and navigating tonal space.

We will here focus primarily on chromatic and enharmonic circularity, establishing a visual vocabulary and conceptual context for reading volvelles by two Portuguese theorists, Antonio Fernandez in the seventeenth-century and João Muito Vaz Barradas in the eighteenth. These elaborate volvelles map intervallic patterns onto chromatically nuanced divisions of the octave, while integrating historical and modern perspectives on tonal space. In *Arte de musica* (Lisbon, 1626), Fernandez presents a *relogio* (clock) presciently uniting central issues of seventeenth-century music theory, see Fig. 2.1.

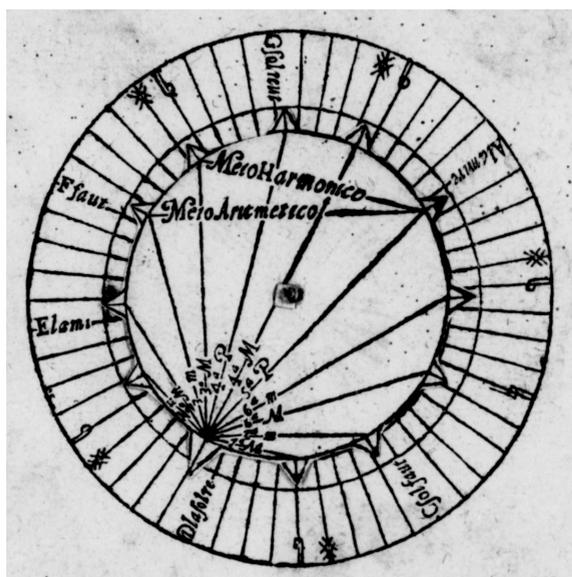


Fig. 2.1. Transposition volvelle, António Fernandez, *Arte de musica de canto dorgam, e canto cham, & proporções de musica divididas harmonicamente* (Lisbon, 1626), fol. 46v. Courtesy of U.S. Library of Congress

The fixed outer circle presents a nuanced division of tonal space. Fernandez uses only one size of whole tone, composed of nine commas, but two sizes of semitones. His major or diatonic semitone (such as E–F or A–Bb) comprises five commas, while his minor or chromatic semitone (between a natural pitch and its chromatic alteration) consists of four commas. Fernandez defines the comma as the difference between the major and minor semitone. The entire octave encompasses fifty-five commas; applied to a keyboard, it would require an instrument of seventeen keys to the octave, with subsemitones (split keys) on all the black notes. Not a fully circulating temperament, Fernandez’s division of the octave closely resembles 1/6-comma meantone tuning, permitting a broad, open arc of eleven diatonic major keys of up to five flats and five sharps.²⁷

The inner, rotating wheel features a pointer from which lines marking each of the eleven “singable” chromatic intervals radiate: minor second, major second, minor third, major third, and so forth. The pointer implicitly marks the first degree of a scale. The teeth are not equidistant, but alternate major and minor semitones, following the comma pattern {5, 4, 5, 4, 5, 4, 5 / 5, 4, 5, 4, 5}. Noteworthy *vis-à-vis* Zarlino are the labels of the thirds: the major third derives from harmonic division of the fifth (*mesoharmonico*) and the minor third from arithmetic division of the fifth (*mesoaritmico*). I thank Thomas Noll for pointing out that Fernandez’s seventeen-note scale is generated by fifth, i.e. $32 \bmod 55$. From G-flat sharpward to A-sharp, ordering by fifth produces the values {28, 5, 37, 14, 46, 23, 0, 32, 9, 41, 18, 50, 27, 4, 36, 13, 45}, which may then be re-ordered by step as {0, 4, 5, 9, 13, 14, 18, 23, etc.}.

Fernandez is one of the earliest theorists to propose 55-equal division of the octave (EDO); 53-EDO was much more common. A century later, 55-EDO would come to be preferred by the likes of Pier Francesco Tosi, Johann Joachim Quantz, and Leopold Mozart in their respective treatises on singing, flute, and violin. Concerned with melodic intonation rather than keyboard temperament, these authors follow Fernandez in proposing a single size of whole tone with two differently sized semitones. Indeed, it seems likely, that, while certainly reflecting the influence of keyboard and harmonic thinking, Fernandez’ audience is preeminently singers. Contrary to modern practice, in which musicians expressively shade sharps high and flats low, these authors and Fernandez locate sharps a comma lower than their enharmonically equivalent flat.

27 See the section 53-EDO versus 55-EDO in Part 1.

The theoretical issues reflected in Fernandez's volvelle reflect central concerns of seventeenth-century music theory: transposability of tonal structures within an ever-widening tonal compass; circular models of tonal space encouraging development of circulating temperaments; and the privileging of major and minor triads as fundamental to musical order (a central concern of Johannes Lippius). Fernandez's volvelle is at once archaic and arrestingly progressive. Moreover, with its resemblance to an astrolabe or quadrant, Fernandez's wheel establishes a visual analogy between musical and physical space, suggesting a shift from speculative science to science based on observation and measurement. Indeed, Fernandez's volvelle bears a striking, if superficial, resemblance to lunar-aspect volvelles by the likes of Martín Cortés, see Fig. 2.2.

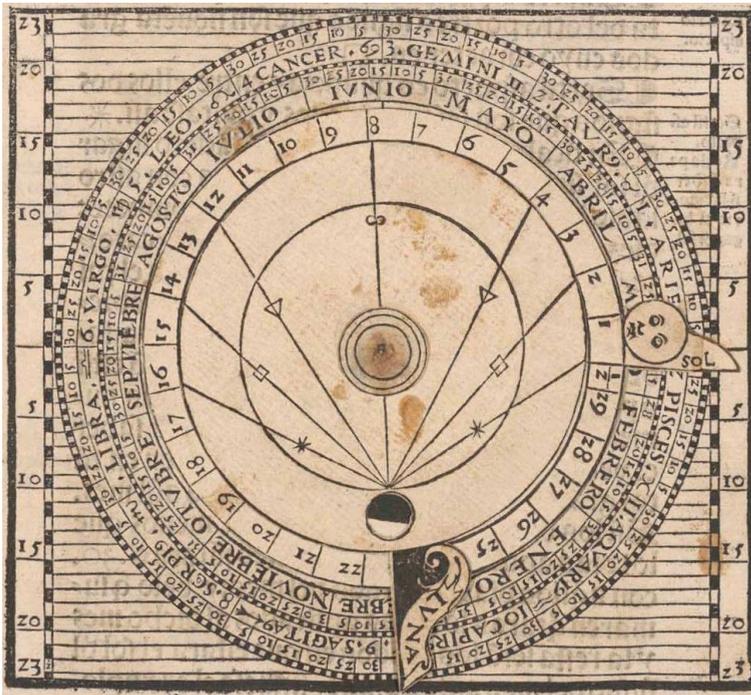


Fig. 2.2. Calendrical volvelle, Martín Cortés, *Breve compendio de la sphaera y de la arte de navegar* (Seville, 1551), fol. 37r. Courtesy of Madrid, Biblioteca Nacional de España.

Cortés's volvelle, with its markings of sextile, quartile, and trine, in turn closely resembles a so-called *Quadrante* made of brass in the collection of the Museo della Storia di Scienza in Florence (made in Florence by Stefano Buonsignori (d. 1589), an instrument with uses as much astrological as astronomical, see Fig. 2.3.



Fig. 2.3. Multi-purpose quadrant by Stefano Buonsignori (Museo Galileo, Inv. 2499, Florence, ca. 1580)

But ultimately, through its careful attention to differentiation of interval sizes, Fernandez's volvelle highlights the limitations of transposition absent the notion of enharmonic equivalence.

These practical limitations are even more evident in a volvelle from another Portuguese treatise published a century later, the *Flores musicaes* of João Muito Vaz Barradas, (Lisbon, 1735), see Fig. 2.4.

Though doubtless indebted to Fernandez, this volvelle is much more complex, combining Vaz Barradas's versions of the diatonic, chromatic, and enharmonic genera. The innermost fixed circle presents the diatonic genus, consisting solely of the six hexachordal syllables, with *ut* on G, plus a seventh syllable, *Bi*, on F. The circle second from the inside adds sharps and flats to the diatonic genus to create what Vaz Barradas calls the chromatic genus; it is virtually identical to Fernandez's volvelle. The third circle presents the chromatic genus transposed up four commas (i.e., a minor semitone), while the fourth circle presents this same chromatic genus transposed down four commas. The outermost circle combines the diatonic, chromatic, and enharmonic genera, producing twenty-four *dieses* of both two and three commas. As with Fernandez, Vaz Barradas divides the octave

equally into fifty-five commas; of the fifty-five “spokes” between commas, pitches occupy thirty-six.

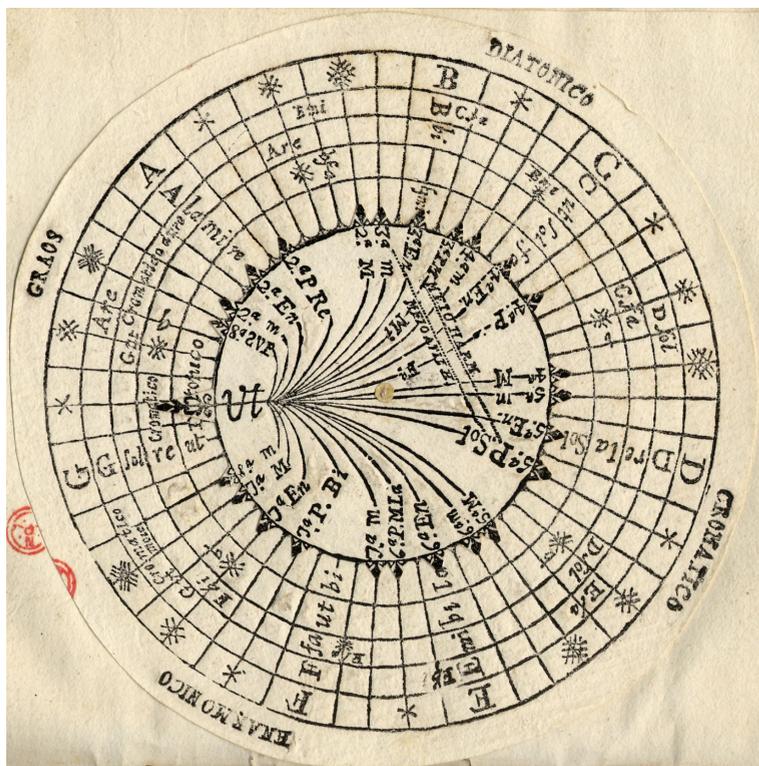


Fig. 2.4. Transposition volvelle, João Muito Vaz Barradas Pão e Morato, *Flores musicas colhidas no jardim da melhor lição de varios autores. Arte Pratica de canto de orgão* (Lisbon, 1735), Breve advertencia, unnumbered leaf. Courtesy of Lisbon, Biblioteca Nacional de Portugal.

The pointer of the revolving wheel is labeled *ut*, but Vaz Barradas includes a total of twenty-four intervals from the three *genera*. *Ut* indicates the unison and octave. The other “perfect” intervals of the diatonic genus are indicated by the letter P and their corresponding *voces*: *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, and *bi* (a semitone above *la*). Inclusion of this heptachordal scale suggests the influence of two-mode theory, in which mode is conceived as a fully transposable pattern of whole and half steps. Proceeding clockwise, *ut* is followed by the augmented (superfluous) octave (four commas) and then four types of seconds: the *secunda minor* (i.e., major semitone, five commas), the *secunda enarmonica* (seven commas), the *secunda perfecta* (i.e., whole tone, nine commas), and the *secunda maior* (i.e., aug-

mented second, nine plus four commas). Next come three types of thirds: *tertia minor* (nine plus five commas above *ut*), *tertia enarmonica* (nine plus seven commas above *ut*), and *tertia perfecta maior* (two equal whole tones above *ut*). Like Fernandez, Vaz Barradas highlights the arithmetic and harmonic derivation of the minor and major thirds, respectively. Of fourths and fifths, the pointer includes four types each: *minor* (i.e., diminished, four commas below the perfect interval), *enarmonica* (two commas below the perfect interval), *perfecta*, and *maior* (augmented, four commas above the perfect interval). The three types of sixths (*minor*, *enarmonica*, and *perfecta maior*) are spaced the same as the thirds. The four types of sevenths (not in order) are the *septima perfecta* (minor seventh, a whole tone below *ut*); the *septima minor* (diminished seventh, four commas below), the *septima enarmonica* (two commas above the perfect seventh), and the *septima maior* (four commas above the perfect seventh and five commas below the octave). In the explanatory text, Barradas indicates that the *septima perfecta* (a whole tone below the octave) signals arithmetic division of the octave. The *septima enarmonica* is the only one of the six so-called enharmonic intervals to be oriented above the diatonic form of its interval. Interestingly, this results in a bilateral symmetry around *ut*: the interval pattern from unison to *quarta perfecta* is inversionally symmetrical with that from octave to *quinta perfecta* with the slight exception of the *quarta enarmonica*). The final interval is the diminished octave (four commas below the octave).

The sophisticated 55-EDO volvelles of Vaz Barradas and Fernandez reflect central concerns of Baroque music theory, including the transposability of tonal structures within circular tonal space and the privileging of major and minor triads as fundamental to musical order. Moreover, with their resemblance to astronomical instruments, they establish a visual analogy between musical and physical space, suggestive of the shift from speculative science to science based on observation and measurement. If both volvelles are premised ultimately on enharmonic differentiation, not equivalence, they nonetheless illuminate the challenges of reconciling received divisions of the octave with circulating temperaments.

Zusammenfassung Part 2

Hinter dem im 17. Jahrhundert vollzogenen Übergang von Modi zu Tonarten verbirgt sich eine allmähliche Verschiebung von leiterartigen zu kreisförmigen Konzeptualisierungen des tonalen Raums. Prägnante Ausdrucksformen der tona-

len Zirkularität sind Volvelles, drehbare Papierscheiben, die es ermöglichen, musikalische Muster wie Intervalle, Hexachorde, Dreiklänge oder Skalen vor einem festen Hintergrund von Tonigkeiten zu transponieren. Die Volvelles zweier portugiesischer Theoretiker sind insofern aufschlussreich, als sie Intervallstrukturen auf chromatisch nuancierte Unterteilungen der Oktave abbilden und gleichzeitig historische und moderne Perspektiven in den tonalen Raum integrieren. In *Arte de musica* (1626) stellt Antonio Fernandez eine Volvelle vor, die in vorausschauender Weise aufkommende Anliegen der Musiktheorie des 17. Jahrhunderts widerspiegelt: (1) Transponierbarkeit tonaler Strukturen innerhalb eines sich erweiternden tonalen Kompasses; (2) Gründe und Randbedingungen für zirkulierende Temperierungen; und (3) Privilegierung von Dur- und Molldreiklängen als harmonische Entitäten. Besonders bemerkenswert ist Fernandez' frühe Übernahme einer gleichmäßigen Teilung der Oktave in 55 Stufen. Ein Jahrhundert später veröffentlichte João Muito Vaz Barradas in *Flores musicaes* (1735) eine noch weiter ausdifferenzierte Volvelle. Diese geht zweifellos auf Fernandez zurück, ist aber komplexer und visualisiert Vaz Barradas' Vorstellungen von diatonischen, chromatischen und enharmonischen Gattungen. Diese ausgefeilten Darstellungen des tonalen Raums basieren auf enharmonischer Differenzierung, und nicht auf enharmonischer Äquivalenz. Sie veranschaulichen auf überzeugende Weise die Herausforderungen und Möglichkeiten, die sich aus der Vereinbarkeit der überlieferten Oktaveinteilung mit den zirkulierenden Temperierungen ergeben.

Part 3: Systematik des musikalischen Zoomens als Verfeinerung

Die nachstehenden systematischen Überlegungen stellen dem Dokumentieren historischer Befunde einen theoretischen Ansatz zur Seite, welcher die Tätigkeit des Zoomens in die Vieltönigkeit vor allem unter dem Aspekt der sich verfeinernden musikalischen Tonbeziehungen in den Blick nimmt. Dabei lassen wir uns von Jacques Handschins Idee leiten, dass musikalische Töne *in Gesellschaft leben* und dadurch einen *Toncharakter* ausbilden. Unser Ansatz eines sukzessiven Erweiterns von Tongesellschaften basiert auf dem Prinzip der *Wechsel-Hinzunahme*. Wir führen diesen Terminus als Pendant zu dem der *Wechselwegname* ein, welcher seinerseits den euklidischen Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier ganzer Zahlen charakterisiert. Als Wegbereiter unserer Methode, die Transformationen von Schrittintervall-Mustern mit Hilfe von Ersetzungsoperationen auf Buchstaben-Sequenzen zu beschreiben,

kann Isaac Newton mit seinen musiktheoretischen Notizen bezeichnet werden. Unser Ansatz ist damit in der Geschichte des Theoretisierens von Vieltönigkeit gut verankert. Dennoch verschieben sich an dieser Stelle die Erfüllungsbedingungen weg vom philologisch kontrollierten Verfolgen von Ideengeschichte hin zu einer logisch kontrollierten Untersuchung von Konsequenzen der Verwendung jenes gegenläufigen Euklidischen Algorithmus sowie zu deren musiktheoretischer Interpretation.

In einem ersten Schritt geht es darum, mit dem Begriff des *wohlgeformten Modus* ein Verständnis von der Konstruktion der (pseudo-klassischen) diatonischen Modi aus der authentischen Oktavteilung zu erzielen, um dann davon ausgehend ein Prinzip für deren vieltönige Erweiterungen abzuleiten. In einem zweiten Schritt wird dann die komplexere Struktur der Dur- und Molltonarten beleuchtet, um wiederum aus dem daran geknüpften Begriff des *paarweise wohlgeformten Modus* ein analoges Erweiterungsprinzip zu gewinnen.

Wohlgeformte Modi können durch mehrere logisch äquivalente Eigenschaften charakterisiert werden. Per Definition wird die unterliegende Skala von einem spezifischen Intervall fester Größe generiert, derart dass alle Instanzen dieses Generators mit derselben Zahl an Schritintervallen gefüllt sind. Dies schließt strenggenommen auch den Sonderfall ein, dass alle Schritintervalle gleich groß sein dürfen. Wenn man ihn aus der Betrachtung ausschließt, ist Wohlgeformtheit äquivalent zur *Myhill*-Eigenschaft. Sie besagt, dass das Schritintervall-Muster eine Anordnung von Instanzen zweier verschiedener Grundintervalle ist, welche ausgewogen ist in dem Sinne, dass alle Stufenintervalle (Sekunden, Terzen, Quart, etc.) in genau zwei verschiedenen Größen auftreten. Bei den diatonischen Modi sind dies fünf große und zwei kleine Sekunden, die sich zu kleinen und großen Terzen, reinen und übermäßigen Quart, reinen und verminderten Quint, kleinen und großen Sexten, sowie kleinen und großen Septimen ergänzen. Aber auch die Oktavteilung in Quinte und Quarte fällt unter diesen Begriff, was uns die Möglichkeit gibt, die diatonischen Modi als deren Erweiterung zu verstehen. Mit jedem Erweiterungsakt werden alle Instanzen des größeren der beiden Intervalle geteilt in eine Instanz des je kleineren und eine Instanz der Differenz aus dem größeren und dem kleineren Intervall. Bei der Erweiterung der Quint/Quartteilung der Oktave, beispielsweise, wird die Quinte in Quarte und große Sekunde (oder umgekehrt) geteilt, so dass ein Schritintervall-Muster aus drei Intervallen entsteht: Quarte-Ganzton-Quarte (oder Ganzton-Quarte-Quarte). Dies sind die beiden authentischen 3-Ton-Modi der musikalischen Tetraktys, welche die Skelette für die disjunkten und konjunkten Tetrachord-Füllungen

bilden. Als *strukturelle Modi* bilden sie die elementaren Bausteine eines dezidiert „wenigtönigen“ Ansatzes zum Fundamentalbass (siehe de Jong und Noll 2018). Die beiden Schritintervalle werden in den folgenden Ausführungen jeweils mit den Buchstaben *a* und *b* bezeichnet. Für die möglichen Intervallteilungen gilt es, vier Fälle zu unterscheiden:

$$D(a) = ba, \quad \tilde{D}(a) = ab, \quad G(b) = ab, \quad \tilde{G}(b) = ba.$$

Es werden in jedem Erweiterungsakt alle Instanzen des das größere Intervall bezeichnenden Buchstabens entweder durch das Wort *ab* oder durch das Wort *ba* ersetzt. Der jeweils ersetzte Buchstabe ändert dabei seine Intervall-Bedeutung, während der andere sie behält. Die neue Bedeutung des ersetzten Buchstabens wird indes das vorige Differenzintervall.

Ausgangsmodus ist also die authentische Teilung der Oktave in Quinte und Quarte *a|b*. Von jedem der beiden Grundintervalle gibt es in diesem Fall nur eine Instanz. Durch Teilung der Quinte *a* erhalten wir die obengenannten *strukturellen Modi* $D(a|b) = ba|b$ und $\tilde{D}(a|b) = ab|b$. Abb. 3.1 zeigt sie als Skelette für disjunkte bzw. konjunkte Tetrachordfüllungen.



Abb. 3.1: Links: Erster struktureller Modus und dessen Ausfüllung zum dorischen Modus. Rechts: Zweiter struktureller Modus und dessen Ausfüllung zum mixolydischen Modus. In beiden Noten-Diagrammen sind die strukturellen Modi jeweils durch leere Notenköpfe repräsentiert und ihre Schritintervall-Muster sind unterhalb der Notensysteme bezeichnet; die Tetrachordfüllungen sind durch ausgefüllte Notenköpfe repräsentiert und die vollständigen diatonischen Schritintervall-Muster sind oberhalb der Notensysteme bezeichnet.

Das Ausfüllen der Tetrachorde erfolgt in zwei Erweiterungsakten. Sowohl beim dorischen als auch beim mixolydischen Modus werden die beiden Quartan durch das symmetrische Tetrachord $G\tilde{G}(b) = G\tilde{G}(ab) = aba$ gefüllt. Für diese Modi hat man also die beiden folgenden Ersetzungen:

$$G\tilde{G}D(a|b) = G\tilde{G}(ba|b) = abaa|aba \quad \text{und} \quad G\tilde{G}D\tilde{D}(a|b) = G\tilde{G}(ab|b) = aaba|aba.$$

Diese Erweiterungsakte haben eine zweite Manifestation, welche sich aus der wohlgeformten Quint-Generiertheit der diatonischen Skala ergibt. Die Eigenschaft der *Wohlgeformtheit* zeigt sich, wie schon gesagt wurde, darin, dass die Diatonik nicht nur quintgeneriert ist, sondern dass auch jede Instanz der Quinte ihrem Namen gerecht wird, d. h. dass sie mit genau vier Skalenschritten ausgefüllt ist. Im Falle der einzelnen Modi äußert sie sich in verfeinerter Weise in den jeweils charakteristischen *Quint-Quart-Faltungen* der übermäßigen Prime in der

„Be-Richtung“ der Quintbreitenachse. Das Faltungsmuster ergibt sich aus der Bedingung, dass die Finalis als tiefster Ton erreicht wird und alle Töne innerhalb von deren Oktavambitus liegen. In Abb.3.2 sind alle sechs authentischen diatonischen Modi mit ihren Schrittmustern und Quint-Quart-Faltungen gezeigt. Wir notieren die Faltungen mit den Buchstaben *x* (für fallende Quinte) und *y* (für steigende Quarte). Beide Intervalle exemplifizieren die Be-Richtung. Der Äolische Modus hat beispielsweise die Faltung *yx|yyxyx* und beginnt mit der 2. Stufe, weil diese am weitesten in Kreuzrichtung liegt. Bezüglich Finalis *c*, wie hier im Beispiel, ist das die Note *d*. Alle diese Faltungsmuster können mit Ersetzungsoperationen erzeugt werden, welche ganz eng mit denjenigen der zugehörigen Schrittmustern zusammenhängen: Man tauscht jeweils \tilde{D} mit D aus und wendet die elementaren Ersetzungen in umgekehrter Reihenfolge an. Das Schrittmuster des Äolischen Modus wird beispielweise durch $G\tilde{G}D\tilde{(a|b)} = G\tilde{G}(ab|b) = G\tilde{(aba|ba)} = abaa|baa$ erzeugt. Wir wenden also $DG\tilde{G}$ auf *x|y* an und erhalten richtig $DG\tilde{G}(x|y) = DG\tilde{(x|yx)} = D(x|yxx) = yx|yyxyx$. (vgl. Abb.3.2 rechte Spalte/Mitte). Der Ausgangszustand *x|y* beschreibt als Skelett dieser Faltungen die Zerlegung der fallenden übermäßigen Prime (d.h. der Tiefalteration) in eine fallende große und eine steigende kleine Sekunde.

The image displays six authentic diatonic modes, each with its characteristic interval pattern and a corresponding sequence of 'a' and 'b' characters above the staff, and 'x' and 'y' characters below the staff representing the interval pattern.

- Lydisch:** Interval pattern: a a a b | a a b. Sequence: y x | y x y x y.
- Dorisch:** Interval pattern: a b a a | a b a. Sequence: x y | x y y x y.
- Ionisch:** Interval pattern: a a b a | a a b. Sequence: x y | x y x y y.
- Äolisch:** Interval pattern: a b a a | b a a. Sequence: y x | y y x y x.
- Mixolydisch:** Interval pattern: a a b a | a b a. Sequence: y x | y x y y x.
- Phrygisch:** Interval pattern: b a a a | b a a. Sequence: x y | y x y x y.

Abb. 3.2: Schrittmustern und Quint-Quart-Faltungen aller 6 authentischen diatonischen Modi.

In dieser zweiten Artikulation der Modi können wir – Jacques Handschin folgend – eine Quelle für die Ausprägung und Parametrisierung des Toncharakters sehen im Sinne einer genuin musikalischen Eigenschaft von Tönen in Gesellschaft.

Der nächste Erweiterungsschritt ist das Zoomen in die chromatischen Modi mit zwölf Schrittmustern vermöge der Zerlegung jeder diatonischen großen

Sekunde in eine kleine Sekunde und eine übermäßige Prime. Dabei wird jede Instanz des Buchstabens a in einem diatonischen Modus entweder durch $D(a) = ba$ oder $D^{\sim}(a) = ab$ ersetzt. Beispielsweise ergibt die Anwendung von D auf den Ionischen Modus einen chromatischen Modus mit durchweg tiefallerierten chromatischen Stufen $D(aaba|aab) = bababba|babab$:



Abb. 3.3: Schrittmuster und Quint-Quart-Faltung eines ausgewählten chromatischen Modus.

In Abb. 3.4 fassen wir die bisherigen Erweiterungen in Form eines Graphen zusammen. Entlang von vier konzentrischen Kreisbögen sind jeweils die Modi einer Familie (math: Konjugationsklasse) aufgereiht und von innen nach außen sind die Modi über die vier Ersetzungen G , G^{\sim} , D und D^{\sim} miteinander verbunden. Die Anzahl der authentischen Modi ist immer um eines kleiner als die Anzahl der Töne. Es gibt immer genau einen Modus, welcher nicht von der authentischen Teilung der Oktave abstammt. Bei den diatonischen Modi ist dies der Lokrische Modus. Die Mathematiker sprechen dabei vom *bad conjugate*.

Nun gibt es genau zwei Alternativen der fortgesetzten Erweiterung, welche auch beide in der Geschichte der Vieltönigkeit verankert sind: Erachtet man die übermäßige Prime als das teilungsfähige Intervall, so führt die Anwendung der Ersetzung D auf den chromatischen Modus $bababba|babab$ hin zum 17-tönigen Modus $DDGGD(a|b) = D(bababba|babab) = bbabbabba|bbabbab$, welcher dann aus zwölf (diatonischen) kleinen Sekunden und fünf verminderten Sekunden besteht. Die zugehörige Quint-Quart-Faltung berechnen wir nach dem beschriebenen Verfahren: In $DDGGD$ ersetzen wir jedes D durch D^{\sim} und wenden diese fünf Ersetzungen in umgekehrter Reihenfolge an: $D^{\sim}GGD^{\sim}D^{\sim}(x|y) = D^{\sim}GG(xy|y) = D^{\sim}(xxxxy|xy) = xyxyxyxyxy|xyxy$ (siehe Abb. 3.5 oben). Rein kombinatorisch ergeben sich aus der Anwendung von D oder D^{\sim} auf die 11 zwölf-tönigen chromatischen Modi insgesamt 16 verschiedene 17-tönige Modi.

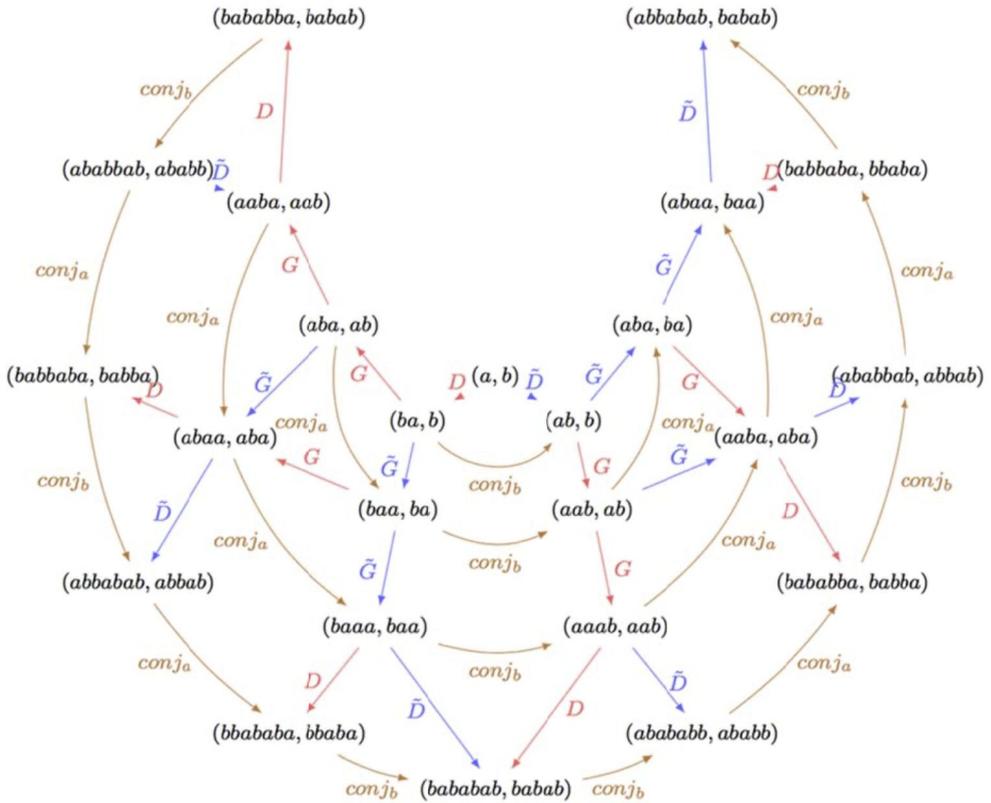


Abb. 3.4: Das Netzwerk zeigt von innen nach außen die Prozesse des Zoomens in die Schrittintervall-Muster der sich verfeinernden Modi. Im Zentrum steht die authentische Teilung der Oktave. Darauf folgen die beiden strukturellen Modi, dann die vier pentatonischen Modi, die sechs siebentönigen diatonischen Modi und außen die elf zwölf-tönigen chromatischen Modi.

Erachtet man in $bababba|babab$ hingegen die mit b bezeichnete kleine Sekunde als das teilungsfähige Intervall, so führt die Anwendung der Ersetzung G auf den 19-tönigen Modus $GDGGD(a|b) = G(bababba|babab) = abaabaababa|abaabaab$ mit der Quint-Quart-Faltung $D\tilde{G}GD\tilde{G}(x|y) = D\tilde{G}GD\tilde{G}(x|xy) = D\tilde{G}G(xy|xyy) = D\tilde{G}(xxx|xxxxy) = xyxyxy|xyxyxyxyxyxy$ (siehe Abb. 3.5 unten).

Die Frage, ob die übermäßige Prime oder die kleine Sekunde das größere und damit teilungsfähige Intervall ist, hängt von der Größe der den Modus generierenden Quinte ab. Hier kommt die Verbindung zwischen spezifischer und generischer Bestimmung der Intervalle ins Spiel, d.h. zwischen den genauen Intervallgrößen einerseits und ihren Stufenbestimmungen andererseits. Ist die spezifische generierende Quinte größer als die 12-temperierte Quinte $7/12$, so gelangen wir

hinsichtlich der Stufenbestimmung in den Einzugsbereich der generischen Quinte 10/17 (10 mikro-chromatische Stufen im 17-Stufensystem). Ist sie kleiner, so gelangen wir in den Einzugsbereich der generischen Quinte 11/19 (11 mikro-chromatische Stufen im 19-Stufensystem).²⁸



Abb.3.5: Schrittmuster und Quint-Quart-Faltungen einer 17-tönigen Erweiterung (oben) und einer 19-tönigen Erweiterung (unten) des zwölftönigen chromatischen Modus *bababba|babab* aus Abb.3.3.

Die spezifische generierende Quinte einerseits und die generische Quinte andererseits – oder allgemeiner: das einen wohlgeformten Modus generierende spezifische Intervall einerseits und sein zugehöriges Stufenintervall andererseits – hängen mathematisch über die Kettenbruchentwicklung zusammen. Das Verhältnis aus Stufenzahl des Generator-Intervalls und der Stufenzahl insgesamt ist nämlich konvergente oder Halbkonvergente der spezifischen Größe des Generator-Intervalls. Wählt man etwa die pythagoreische Quinte $\log_2(3/2)$ als Generator-Intervall, so ergeben deren (Halb-)Konvergenten $1/2, 2/3, 3/5, 4/7, 7/12, 10/17, 17/29, 24/41, 31/53, \dots$ einen dadurch eindeutig festgelegten Erweiterungspfad. Wann immer der Nachfolger eines Gliedes dieser Folge größer als dasselbe ist, kommen für die Erweiterung eines betreffenden Modus die Ersetzungen D oder D^\sim in Frage. Ist der Nachfolger hingegen kleiner, so sind es die Ersetzungen G oder G^\sim . Konkret gilt: $1/2 < 2/3 > 3/5 > 4/7 < 7/12 < 10/17 > 17/29 > 24/41 > 31/53, \dots$

Aus dem (von links nach rechts zu lesenden) Muster $< > > < > >$ ergibt sich die (von rechts nach links auszuführende) Verkettung $GGDDGGD$ elementarer Ersetzungen für einen Quint-generierten Modus von 53 Tönen, dessen Quinten je mit 31

²⁸ Das 17-Stufensystem verweist auf einen pythagoreischen, das 19-Stufensystem auf einen mittel-tönigen Kontext, vgl. Part 1.

Mikro-Stufen gefüllt sind. Dabei werden im 17-Ton-Modus *bbabbabbb|bbabbab* von jedem der zwölf mit *b* bezeichneten diatonischen Halbtöne drei Mikro-Intervalle vom Typ *a* (verminderte Sekunden) abgespalten:

$$GGG(bbabbabbb|bbabbab) = aaabaaabaaabaaabaaabaaabaaab|aaabaaabaaabaaabaaab$$

Der eingangs erwähnte Zusammenhang zum euklidischen Algorithmus zeigt sich hier wie folgt: Die Anwendung der Wechselwegnahme auf die Zähler und Nenner, beginnend vom Bruch 31/53 gibt die Folge 31/53, 31/22, 9/22, 9/13, 9/4, 5/4, 1/4, 1/3, 1/2 mit dem Muster *NZZNZZNNN* (*N* = Wegnahme des Zählers vom Nenner, *Z* = Wegnahme des Nenners vom Zähler). Dieselben Brüche 1/2 und 31/53 sind in umgekehrter Reihenfolge durch dasselbe Muster von (Halb-)Konvergenten $\langle \rangle \rangle \langle \rangle \rangle \rangle$ verbunden. Und im Zoomprozess der Modi erscheint dasselbe Muster in der Abfolge der Ersetzungen *D* und *G*, wobei die jeweils mögliche Wahl von *D* oder \tilde{D} , bzw. *G* oder \tilde{G} hinter der Kombinatorik der modalen Vielfalt steht.

An dieser Stelle ist es nützlich, die bislang angestellten Überlegungen vor dem Hintergrund der eingangs formulierten Motivation einzuordnen. Die quintgenerierten wohlgeformten Modi sind nur eine ausgewählte Subfamilie im Rahmen eines für beliebige generierende Intervalle gültigen Ansatzes. Diese ist jedoch paradigmatisch für die Auseinandersetzung mit der traditionellen Tonhöhennotation und beleuchtet die Vieltönigkeit im Zusammenhang mit der Theorie des Mittelalters, der pythagoreischen Stimmung und darauf bezogene Aspekte der Mitteltönigkeit. Die für die mathematische Begriffsbildung typische Tätigkeit des Verallgemeinerns bringt es mit sich, dass der Ansatz neben jenen musikalisch prominenten Modi auch unzählige musikalisch kontrafaktische Modi mit ungebrauchlichen generierenden Intervallen erfasst. Daraus mögen sich auch Anregungen für experimentierfreudige Musiker ergeben. Vor allem aber bringt diese Verallgemeinerung im Zusammenhang mit David Clampitts Untersuchungen zu den *paarweise wohlgeformten Skalen* aber auch eine unerwartete neue theoretische Idee ins Spiel, welche die neuzeitliche Konzeptualisierung von Tonbeziehungen nach Zarlino betrifft. Abbildung 3.6 zeigt Zarlinos Diagramm zum *Monochordo Diatonico Syntonico* aus der *Seconda Parte* seiner *Istitutioni Harmoniche* von 1558 (Kapitel 43: »Dimostrazione della quale si può comprendere, che la mostrata Participatione, o Distributione sia ragioneuolmente fatta, & che per altro modo non si possa fare«).

Stimmung exemplifiziert eine wohlgeformte Diatonik (wie auch die in Part 1 behandelte 1/4-Komma-Mitteltönigkeit).

Eine erst unlängst entwickelte theoretische Idee (siehe Clampitt 1997, Noll & Clampitt 2018, 2019, 2022, 2024) besteht darin, dem *diatonisch-syntonischen Modus* nicht nur eine, sondern zwei Projektionen auf wohlgeformte Modi zuzuordnen. Dazu schreiben wir diesen Modus mit Hilfe der drei Buchstaben *a* (großer Ganzton), *b* (Halbton) und *c* (kleiner Ganzton) als *acbacab*. Neben der *diatonischen Projektion aabaaab*, welche die Buchstaben *a* und *c* miteinander identifiziert und damit die Unterscheidung des großen vom kleinen Ganzton aufhebt, gibt es eine *syntonische Projektion abbabab*, welche die Buchstaben *c* und *b* miteinander identifiziert und damit die Unterscheidung des kleinen Ganztons vom Halbton aufhebt. Im syntonischen Modus *abbabab* lassen sich *tonale* Tonschritte (*a*) und *modale* Tonschritte unterscheiden (*b*), während der Unterschied zwischen Dur *acbacab* und Moll *abcabac* verschwindet, welcher sich ja gerade als Austausch der Rollen jener modalen Schritte *c* und *b* manifestiert. Die syntonische Projektion lässt sich daher als eine den Tongeschlechtern Dur und Moll gemeinsame Grundstruktur betrachten.

Die Methode der Wechsel-Hinzunahme mit Hilfe von Ersetzungsoperationen lässt sich in hinreichender Allgemeinheit auf derartige *paarweise wohlgeformte Modi* ausdehnen (Noll & Clampitt 2018, 2022, 2024). Im Kontext der hier angestellten Überlegungen ist es spannend, auf ein dabei auftauchendes Hindernis hinzuweisen sowie auf dessen Überwindung. Bei den paarweise wohlgeformten Modi wird die authentische Teilung $a|b$ der Oktave als Ausgangszustand durch eine triadische Teilung $c|b|a$ oder $b|c|a$ ersetzt, hier in den Beispielen konkret bestehend aus großer Terz *c*, kleiner Terz *b* und Quarte *a*. Die Ausfüllung dieser triadischen Teilung ist dann im Falle des diatonisch-syntonischen Moll-Modus *acbacab* die Ersetzung

$$f(c) = ac, f(b) = ba, f(a) = cab.$$

Die „diatonische“ Projektion *aba|aab* erbt die Teilung der Oktave in die perfekten Konsonanzen Quinte und Quarte. Die syntonische Projektion *ab|babab* dieses Modus erbt die Teilung der Oktave in die imperfekten Konsonanzen Terz und Sexte. Eine naheliegende Erwartung an den transformationellen Ansatz ist, dass mit den Ersetzungsoperationen, welche paarweise wohlgeformte Modi erzeugen, auch deren wechselseitige Verknüpfungen ebenfalls paarweise wohlgeformte Modi erzeugen. Denn genau diese Eigenschaft macht die besondere Effektivität des Graphen in Abb. 3.4 aus, dessen Verbindungen aus den vier elementaren Ersetzungen G , \tilde{G} , D und \tilde{D} zusammengesetzt werden können. Doch zeigt sich, dass bereits die Verknüpfung von f mit sich selbst dazu ein Hindernis darstellt. Allein schon die Buchstaben-

folge $f(f(a)) = f(cab) = accabba$ ergibt unter der Identifikation von a mit c die Projektion $aaaabba$, welche eine Unausgeglichenheit aufweist, die Wohlgeformtheit ausschließt. Und dennoch verdient die doppelte Anwendung von f auf die triadische Teilung $b|c|a$ unser Interesse, denn bis auf Abweichungen in jener Reihenfolge der Buchstaben in $f(f(a))$ hat das Ergebnis $f(f(b|c|a)) = f(ac|ba|cab) = bacab|cabac|accabba$ frappierende Ähnlichkeit mit dem paarweise wohlgeformten Modus $bacab|cabac|bacabca$ aus 17 Tonschritten. Dessen „diatonische“ Projektion $baaabaabaa|baaaba$ wurde bereits oben untersucht (in der konjugierten Form $bbabbabbba|bbabbab$ mit vertauschten Rollen von a und b). Die syntonische Projektion dieses Modus $babab|bababbababba$ kann nach Vertauschung der Rollen von a und b als $ababa|ababaababaab = G(bba|bbabbab) = GDD(a|aab) = GDD(a|aab) = GDDGG(a|b)$ ebenfalls aus den Ersetzungsoperationen G und D gewonnen werden.

Einen Ausweg, nicht nur für dieses konkrete Beispiel, bietet die Verwendung von Ersetzungen auf Wörtern mit vier Buchstaben a, b, c, d . Am konkreten Beispiel ergeben sich auf diesem Wege besonders interessante Erweiterungen in die Vieltönigkeit, weil die Iteration einer Ausgangsoperation auf selbstähnliche Schrittmuster führt. Wir betrachten die Ersetzung:

$$h(d) = bac, h(a) = cdb, h(b) = ba, h(c) = cd$$

Damit füllen wir den 7-tönigen diatonisch-syntonischen Modus $h(c|b|a) = (cd|ba|cdb)$, identifizieren anschließend die Buchstaben a und d und erhalten schließlich den paarweise wohlgeformten Modus $ca|ba|cab$. Die Verknüpfung von h mit sich selbst führt auf den 17-tönigen Modus $h(h(c|b|a)) = h(cd|ba|cdb) = cdbac|bacdb|cdbacba$, welcher nach Identifikation von a und d zu dem oben vorgestellten Modus $cabac|bacab|cabacba$ wird. Eine dreifache Iteration dieser Ersetzung führt auf einen selbstähnlichen paarweise wohlgeformten 41-Ton-Modus.

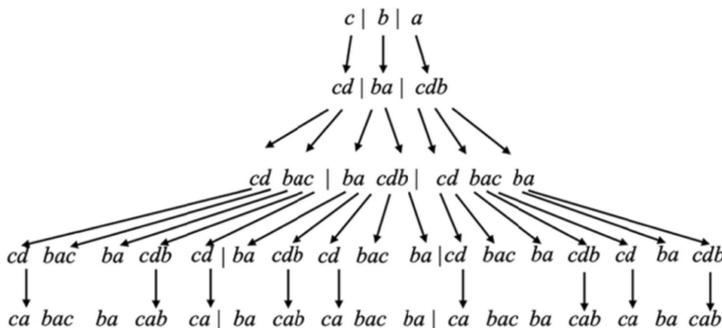


Abb. 3.7: Zoomen in die Vieltönigkeit von der triadischen Oktavteilung über einen diatonisch syntonischen Dur-Modus in eine selbstähnliche 17- und 41-Tönigkeit durch die iterierte Anwendung der Ersetzungsoperation $h(d) = bac, h(a) = cdb, h(b) = ba, h(c) = cd$.

Epilog

Für die systematische Musiktheorie stellt ihre Fähigkeit traditionelles musiktheoretisches Wissen zwanglos und effektiv zu mathematisieren eine wesentliche Grundvoraussetzung für den Erfolg ihrer Modellierung dar. Die historische Musiktheorie profitiert von stringenten mathematischen Modellen, die es ihr erlauben, historische Ansätze als Beiträge zum zeitgenössischen und zum aktuellen musiktheoretischen Wissen zu deuten. Fragen der Neuheit und Originalität bestimmter Ideen können auf dieser Grundlage neu verhandelt werden. Vor diesem Hintergrund verlangen die hier vorgelegten Untersuchungsergebnisse eine aufbauende Integration systematischer und historischer Perspektiven.

Schon jetzt kristallisieren sich einige Erkenntnisse und weiterführende Fragen heraus:

Wenn das Zoomen in die Vieltönigkeit auf wohlgeformte Modi beschränkt wird, bietet die algebraische Kombinatorik auf Wörtern und insbesondere das Teilgebiet der Sturm'schen Morphismen eine adäquate Modellierung, die sich als strukturelle Verfeinerung der Methode der Wechselwegnahme (euklidischer Algorithmus) entpuppt und damit eine Kontinuität im mathematischen Denken über Tonsysteme aufzeigt. Damit einher geht ein Paradigmenwechsel, der die Transformationen – die Akte des Zoomens im engeren Sinne – in den Mittelpunkt der Untersuchung stellt und so die Möglichkeit periodischer Verknüpfungen elementarer Transformationen thematisiert. Entsprechend greift Abb.3.4. die in Part 1 behandelte Tradition der musikalischen Bogendiagramme auf. Allerdings repräsentieren die Knoten darin nicht Töne sondern Modi und die Bogenverbindungen nicht Intervalle, sondern Transformationen, welche die Modi ineinander überführen.

Die Erschließung selbstähnlicher vieltöniger Systeme hat in der symmetrischen Teilung des Ganztons in zwei durch ein Komma getrennte Limmata eine bisher wenig beachtete Vorgängerin, welche die traditionelle Oktavteilung Quarte-Ganzton-Quarte der musikalischen Tetraktys repliziert.

In diesem Zusammenhang sind theoretische Alternativen zwischen dem nicht-periodischen Zoomen ...GGDDGGDD (oder Varianten wie ...GG[~]GD[~]DG[~]GD[~]D) in die von der reinen Quinte (Binärlogarithmus von 3/2) generierten wohlgeformten Modi einerseits und dem selbstähnlichen Zoomen ...DGGDDGGDD (oder Varianten wie ...DG[~]GD[~]DG[~]GD[~]D) in die von ›Herbarts Quinte‹ (2 minus die Quadratwurzel von 2) generierten wohlgeformten Modi andererseits von Interesse. Die vielfältigen Wahlmöglichkeiten führen zwanglos zur Hinterfragung des mu-

sikalischen Tonhöhenbegriffs. Die Transformation *DGGD* etwa generiert das chromatische Zwölftonsystem aus der authentischen Oktavteilung und führt auf Herbarts Quinte als Eigentonhöhe.²⁹

Die Tragweite des vorgestellten Ansatzes einer doppelten Fundierung der harmonischen Tonalität im Begriffsfeld von Diatonik und Syntonik wird sich in weiterführenden Untersuchungen zu den Tonbeziehungen – in Melodik, Harmonik, Stimmführung, Kontrapunkt – erweisen. Die bisherigen Überlegungen zeigen, dass er sich jedenfalls gut eignet, ein kontrolliertes Zoomen in die Vieltönigkeit aufzubauen.

Literatur

- Anonymus (14. Jh.), *Compendium de Musica*, Ms. Bibl. Royale Albert Ier 10162–66 [15. Jh.], 48r–54v, Facsimile in: Joseph Smits van Waesberghe et al. (eds.), *Jacobi Leodiensis Tractatus de consonantiis musicalibus. Tractatus de intonatione tonorum. Compendium de musica*. Buren: Frits Knuf (1988).
- Barbour, James Murray (1951), *Tuning and temperament: A historical survey*, East Lansing: Michigan State College Press, Reprint New York: Da Capo Press 1972.
- Carey, Norman / David Clampitt (1989), »Aspects of Well-formed Scales«, *Music Theory Spectrum* 11, 187–206.
- Carey, Norman / David Clampitt (1996), »Regions: A theory of tonal spaces in early medieval treatises«, *Journal of Music Theory*, 40(1), 113–147.
- Clampitt, David (1997), *Pairwise well-formed scales: structural and transformational properties*, Ph.D., State University of New York at Buffalo.
- Clampitt, David / Thomas Noll (2011), »Modes, the Height-Width Duality, and Handschin's Tone Character«, *Music Theory Online* 17/1. http://www.mtosmt.org/issues/mto.11.17.1/mto.11.17.1.clampitt_and_noll.html (4.9.2022)
- Curtze, Maximilian (Hg.) (1868), *Der Algorithmus Proportionum des Nicolaus Oresme. Zum ersten Male nach der Lesart der Handschrift R. 4°. 2. der Königlichen Gymnasial-Bibliothek zu Thorn*, Berlin: Calvary.
- De Jong, Karst / Thomas Noll (2018), »Fundamental Bass and Real Bass in Dialogue: Tonal Aspects of the Structural Modes«, *Music Theory Online* 24/4. https://mtosmt.org/issues/mto.18.24.4/mto.18.24.4.de_jong_noll.html (4.9.2022)
- Desmond, Karen (2000), »New light on Jacobus, Author of *Speculum musicae*«, *Plainsong & Medieval Music* 9(1), 19–40. <https://doi.org/10.1017/S0961137100000024>
- Eisholdt, Adelheid / Inga Mai Groote (2010), »Heinrich Glarean's Library and Its Intellectual Contexts«, *Mitteilungen Universität München* 1/2010.

²⁹ Siehe dazu Noll (2016).

- Erlanger, Rodolphe d' (1938), *La musique arabe*, Vol. 3, Paris: Librairie Orientaliste Paul Geuthner.
- Fernandez, António (1626), *Arte de musica de Canto Dorgam, e Canto Cham, & proporções de musica divididas harmonicamente Arte de musica*, Lisboa: Pedro Craesbeeck.
- Guido von Arezzo (c. 1200), *Micrologus*, Ms. D-Mu 8° Cod. ms. 375 (Cim 13), fol. 43–53, München: Universitätsbibliothek.
- Heinzelmann, Sigrun (2012), »John Hothby as Innovator: The Solmization System in La Calliopea legale«, *Studi Musicali Anno I*, Nuova Serie 2012, n. 2, 353–396.
- Hentschel, Frank (2000), *Sinnlichkeit und Vernunft in der mittelalterlichen Musiktheorie: Strategien der Konsonanzwertung und der Gegenstand der musica sonora um 1300*, Stuttgart: F. Steiner.
- Holder, William (1731), *A treatise of the natural grounds, and principles, of harmony* [1694], London, Reprint Bristol: Thoemmes Press, 2003.
- Kirnbauer, Martin (2015), »›Viertönigkeit‹ instead of Microtonality. The Theory and Practice of Sixteenth- and Seventeenth-Century ›Microtonal‹ Music«, in: *Experimental Affinities in Music*, hg. von Paulo de Assis, Leuven: Leuven University Press, 64–90.
- Lindley, Mark (1987) »Stimmung und Temperatur«, in: *Geschichte der Musiktheorie*, Bd. 6, *Hören, Messen und Rechnen in der frühen Neuzeit*, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 109–331.
- Muzzulini, Daniel (2021), »Music and Mathematics: Diagrammatic Reasoning in the 14th Century«, *DIAGRAMS 2021, 12th International Conference on the Theory and Application of Diagrams*, September 28–30, 2021 (Poster). https://medienarchiv.zhdk.ch/entries/aod_muzzulini_diagrams_2021
- Muzzulini, Daniel (2020), »Isaac Newton's microtonal approach to just intonation«, *Empirical Musicological Review* 15, No. 3–4, 223–248. <https://doi.org/10.18061/emr.v15i3-4.7647>
- Newton, Isaac (1665), »Of Musick«, in: *College Notebook*, MS Add. 4000, fol. 138r–143r. Cambridge University Library. <https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-04000/1> (4.9.2022). Critical Edition in Wardhaugh (2014, 85–113).
- Noll, Thomas (2016), »Handschins ›Toncharakter‹. Plädoyer für einen neuen Anlauf, ausgehend von neueren musiktheoretischen und kognitionspsychologischen Untersuchungen zu den tonalen ›Qualia‹«, *Zeitschrift der Gesellschaft für Musiktheorie* 13/2, 237–295. <https://doi.org/10.31751/918>
- Noll, Tomas (2020), »Consistent Pitch Height Forms: A commentary on Daniel Muzzulini's contribution ›Isaac Newton's Microtonal Approach to Just Intonation‹«, *Empirical Musicological Review* 15, Nr. 3–4, 268–272. <https://doi.org/10.18061/emr.v15i3-4.8243>
- Noll, Thomas / David Clampitt (2018), »Kaleidoscope substitutions and pairwise well-formed modes: major-minor duality transformationally revisited«, *Journal of Mathematics and Music* 12(3), 171–211.
- Noll, Thomas / David Clampitt (2019), »Exploring the Syntonic Side of Major-Minor Tonality«, in: *Mathematics and Computation in Music. MVM 2019. Lecture Notes in Computer Science*, hg. von M. Montiel, F. Gomez-Martin, O.A. Agustín-Aquinoe, Bd. 11502, Cham: Springer, 125–136. https://doi.org/10.1007/978-3-030-21392-3_10

- Noll, Thomas / David Clampitt (2022), »Transformations for Pairwise Well-Formed Modes«, in: *Mathematics and Computation in Music. MCM 2022. Lecture Notes in Computer Science*, hg. von M. Montiel, O.A. Agustín-Aquino, F. Gómez, J. Kastine, E. Lluís-Puebla und B. Milam, Bd. 13267, Cham: Springer, 140–152. https://doi.org/10.1007/978-3-031-07015-0_12
- Noll, Thomas / David Clampitt / Mariana Montiel (2024), »The Sandwich-Lemma: The Recursive Structure of Super-Syntonic and Super-Diatonic Automorphisms«, in: *Mathematics and Computation in Music. MCM 2024. Lecture Notes in Computer Science*, hg. von T. Noll, M. Montiel, F. Gómez, O. C. Hamido, J. L. Besada, J. O. Martins, Bd. 14639, Cham: Springer, https://doi.org/10.1007/978-3-031-60638-0_7
- Oresme, Nicole (14. Jh.), *Algorismus proportionum*, Ms. F II 33, fol. 95v–98v, Basel: Universitätsbibliothek
- Rudolfus de S. Trudone (ca. 12. Jh.), »Questiones in Musica«, Ms. D-Ds 1988, 110v–143v. <http://tudigit.ulb.tu-darmstadt.de/show/Hs-1988> (17.7.2023)
- Ugolino da Orvieto (ca. 1435), *Declaratio Musicae Disciplinae*, Ms. I-Rc 2151, Roma: Biblioteca Casanatense.
- Salinas, Francisco (1577), *De musica libri septem, Salamanca: Mathias Gastius*, Reprint M.S. Kastner (Hg.), Documenta Musicologica I no. 13. Kassel: Bärenreiter 1958.
- Stifel, Michael (1544), *Arithmetica Integra*, Nürnberg: Petreius.
- Vaz Barradas, João Muito (1735), *Flores musicaes*, Lisboa: Officina da musica.
- Wardhaugh (Hg.) (2014), *The Compendium Musicae of René Descartes: Early English Responses*, Turnhout: Brepols.
- Wild, Jonathan (2014), »Genus, Species and Mode in Vicentino's 31-tone Compositional Theory«, *Music Theory Online* 20/2. <https://mtosmt.org/issues/mto.14.20.2/mto.14.20.2.wild.html> (3.9.2022)
- Zarlino, Gioseffo (1558), *Le Istitutioni Harmoniche*, Venetia: De Franceschi.

© 2025 Daniel Muzzulini (daniel@muzzulini.ch , ORCID iD: 0000-0003-1228-6416), Michael Dodds (dodds@uncsa.edu, ORCID iD: 0009-0006-6897-0582), Thomas Noll (ORCID iD: 0000-0001-6701-7104)

Zürcher Hochschule der Künste [Zurich University of the Arts]; University of North Carolina [University of North Carolina]; Escola Superior de Música de Catalunya

Muzzulini, Daniel / Michael Dodds / Thomas Noll (2025), »Zooming into Chroma Spaces. Experimente in und zur Geschichte der Vieltönigkeit«, in: *Tonsysteme und Stimmungen. 21. Jahreskongress der Gesellschaft für Musiktheorie (GMTH Proceedings 2021)*, hg. von Moritz Heffter, Johannes Menke, Florian Vogt und Caspar Johannes Walter, 385–424. <https://doi.org/10.31751/p.337>

eingereicht / submitted: 08/09/2022

angenommen / accepted: 11/07/2023

veröffentlicht / first published: 01/09/2025

zuletzt geändert / last updated: 01/09/2025