

Cycling in Tonal Space

Neo-Riemannian Theory in der dritten Dimension

Jakob Rieke

Der Beitrag greift Ideen der *Neo-Riemannian Theory* auf, nimmt Bezug auf Richard Cohn und stellt neu entwickelte dreidimensionale Modelle vor, mit denen sich Dreiklangs- und Vierklangsverbindungen alternativ zum *Cube Dance* von Jack Douthett und Peter Steinbach und zu Cohns *4-Cube-Trio* darstellen lassen. Ausgehend von Edward Gollins *3D-Tonnetz* beschreibt er außerdem variable Modelle, die sich auf verschiedene Akkordklassen anwenden lassen.

This article responds to suggestions of *Neo-Riemannian Theory*, referring to Richard Cohn. It presents some new three-dimensional models that depict the connections of triads and seventh chords as alternatives to Jack Douthett's and Peter Steinbach's *Cube Dance* and to Cohn's *4-Cube-Trio*. Finally, variable models based on Edward Gollin's *3D-Tonnetz* are described that may be applied to diverse chord classes.

Schlagworte/Keywords: Alexander Scriabin; Alexander Skrjabin; dreidimensionale NRT-Modelle; dreidimensionales Tonnetz; Hugo Wolf; Neo-Riemannian Theory (NRT); NRT models in three dimensions; Prélude op. 11/2; Spanisches Liederbuch; three-dimensional Tonnetz

Die romantische Musik mit ihrer progressiven Harmonik hat die Musiktheorie zu vielen Deutungsvorschlägen angeregt. In der Nachfolge von Hugo Riemanns musiktheoretischen Konzepten entstand vor allem in Amerika in jüngerer Zeit eine Strömung, die inzwischen international etabliert ist und deren einzelne Ansätze unter dem Begriff *Neo-Riemannian Theory (NRT)* zusammengefasst werden. Die Methoden der *NRT* zeichnen sich nicht zuletzt durch die vielfältige Verwendung graphischer Modelle aus. Richard Cohn, dessen Arbeiten die *NRT* maßgeblich geprägt haben, erläutert in seinem 2012 erschienenen Buch *Audacious Euphony – Chromaticism and the Triad's Second Nature*¹ verschiedene zu dieser Zeit bekannte Modell-Transformationen und kombiniert sie teilweise zu neuen, aussagekräftigeren Varianten. Im siebenten Kapitel widmet er sich den in der *NRT* unterrepräsentierten Vierklangsverbindungen. Der vorliegende Beitrag greift einige der in *Audacious Euphony* entwickelten Gedanken auf, skizziert deren Grundlagen und stellt einige neu entwickelte Modelle zur Deutung und Darstellung verschiedener Akkordverbindungen (*Hexentreppe*, *Heart Cubes*, *Vierklangs-Spindel*) sowie eine Erweiterung des *3D-Tonnetzes* von Edward Gollin² vor, die sich größtenteils mit Vierklangs-Relationen befassen und deren Vorteil in einer dreidimensionalen Darstellungsweise liegt.

1 Cohn 2012.

2 Gollin 1998, 200f.

benverwandt): Des-Dur/ges-Moll, **S** (*slide*): H-Dur/c-Moll.⁴ Charakteristisch für diese *Neo-Riemannian relations* ist die chromatisch enge Stimmführung (Cohn nennt den Austausch eines einzelnen Tones, z. B. Ges-F in **L** einen *flip* um die gemeinsame Achse). **L**, **P** und **H** ergeben in Kombinationen nur Progressionen innerhalb der Grenzen eines *hexatonic cycle* (eine Gruppe von sechs Dreiklängen auf der hexatonischen Kleinsekund-Kleinterz-Skala), **R**, **N** und **S** bewegen sich in gleicher Weise in einer *Weitzmann-region* (eine vergleichbare Gruppe aus ebenfalls sechs Dreiklängen auf der oktatonischen Kleinsekund-Großsekund-Skala, benannt nach Carl Friedrich Weitzmann, der 1853 in seiner Schrift *Der Uebermaessige Dreiklang*⁵ die ersten Anstöße in Richtung einer neuen Musiktheorie gab).

Zunächst will ich eine Alternative zum *Cube Dance* vorstellen, einem Modell, das aus einer algorithmischen Folge von Dreiklangsverbindungen konstruiert ist (Abb. 2). Cohn übernahm dieses Modell leicht verändert von Jack Douthett und Peter Steinbach.⁶ Es vereint die beiden für seine Argumentation essentiellen Dreiklangsguppen der *Weitzmann-region*⁷ und des *hexatonic cycle*⁸ zu einem Gebilde, das alle 24 Dur- und Molldreiklänge sowie die vier übermäßigen Dreiklänge in zwölf *voice-leading zones* unterteilt. An ihnen kann man die Stimmführungsdistanz zwischen den Dreiklängen in Halbtonschritten (Cohn nennt diese minimale Einheit chromatischer Stimmführung eine *working unit*) ablesen.

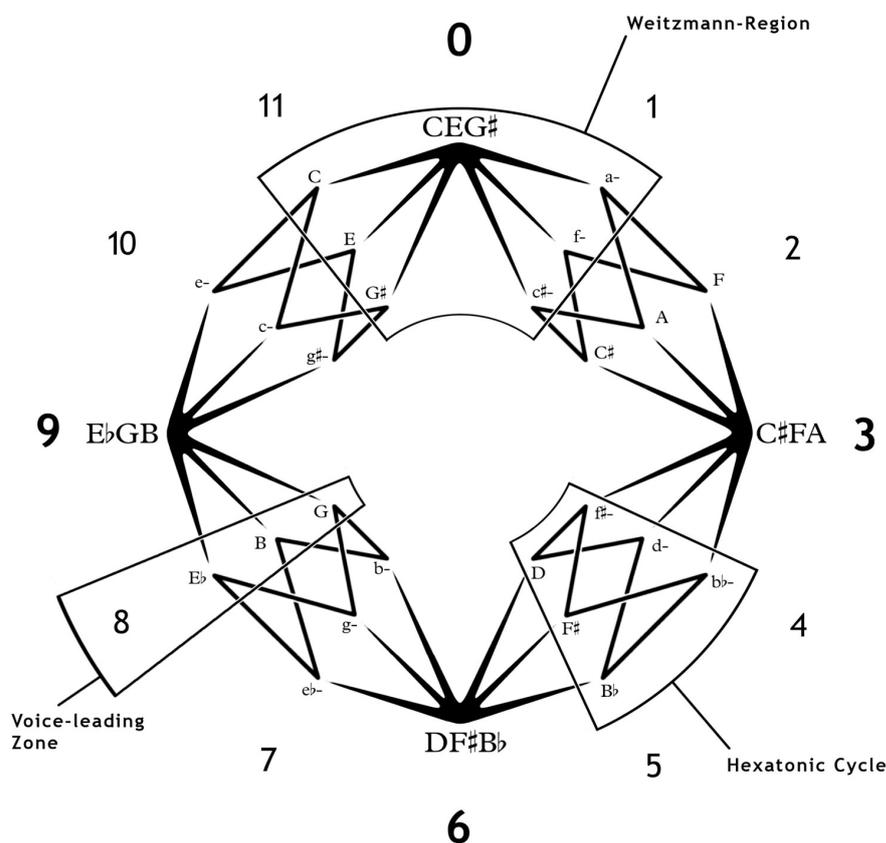


Abbildung 2: *Cube Dance*

- 4 Dieses Vokabular bildet die Basis der *NRT*, der interessierte Leser sei auf Cohn 2012 verwiesen, wo alle wichtigen Termini von Grund auf erklärt werden.
- 5 Weitzmann 1853.
- 6 Douthett/Steinbach 1998, 253f.
- 7 Cohn 2012, 59f.
- 8 Ebd., 17f.

In dem Modell sind die Dreiklänge zu Punkten zusammengezogen. Bei der eigenständigen graphischen Darstellung der *Weitzmann-region* ringt Cohn mit verschiedenen Fassungen, die sich schrittweise vom entsprechenden Ausschnitt des Tonnetzes entfernen (Abb. 3). Im Original ist der übermäßige Dreiklang durch drei Glieder der Großterzachse abgebildet und die *region* besteht aus den sechs anliegenden Dreiecken. Nachteilig an dieser Darstellungsweise sind die Umstände, dass erstens ein Ton des übermäßigen Dreiklangs verdoppelt wird und an beiden Enden der Achse auftaucht, zweitens dieser Akkord ein anderes Erscheinungsbild als die sechs umliegenden Akkorde hat und drittens die Stimmführungsdistanz von je zwei Halbtonschritten zwischen den sechs Dreiklängen nicht ablesbar ist. Das dritte Problem löst Cohn, indem er den übermäßigen Dreiklang zu einer Fläche aufspreizt, an der die sechs Akkorde angrenzen, wie sechs Räume an einen Flur. In dieser Variante muss sich jeder Akkordwechsel von einem Zimmer zum anderen durch den Flur bewegen, was zwar die Stimmführungsdistanz (als zwei ›Raumwechsel‹) korrekt wiedergibt, aber dafür alle Töne des übermäßigen Dreiklangs mehrfach darstellt.⁹ Die eleganteste Darstellung ist der *Weitzmann water bug*,¹⁰ ein Käfer bestehend aus einem Körper (übermäßig) und sechs Beinen links und rechts (Dur und Moll).

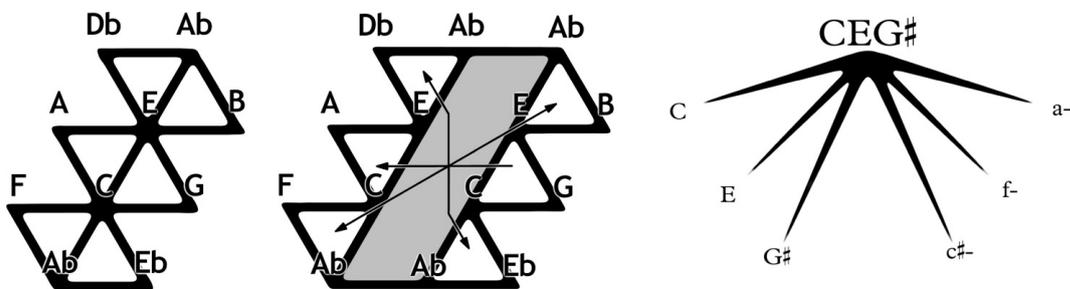


Abbildung 3: Darstellungen der *Weitzmann-region* links als Ausschnitte des Tonnetzes, rechts als *Weitzmann water bug*

Die Visualisierung des *hexatonic cycle* (Abb. 4) ist nicht ganz so problematisch, gegen die Übernahme des ›Akkordbandes‹ aus dem Tonnetz spricht hier nur die Erscheinung der angrenzenden übermäßigen Dreiklänge als Achsenabschnitte.

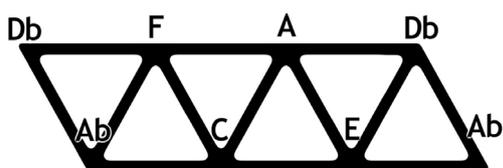


Abbildung 4: Der *hexatonic cycle* als Ausschnitt des Tonnetzes

Da den übermäßigen Dreiklängen in hexatonischen Verbindungen nicht dieselbe transitorische Rolle wie im Zusammenhang mit der *Weitzmann-region* zukommt, stellt dies aber auch kein direktes Problem dar und es wird erst im Zuge der Entwicklung des *Cube Dance* die Form des würfelförmigen Moduls gefunden, das bereits eine latente Dreidimensionalität aufweist (vgl. Abb. 2).

Ausgangspunkt meiner Weiterentwicklung ist nun die Annahme, dass der *hexatonic cycle* erst dann angemessen graphisch repräsentiert ist, wenn die übermäßigen Dreiklän-

9 Ebd., 65.

10 Ebd., 60.

ge im Erscheinungsbild an die Dur- und Mollklänge angeglichen sind. So habe ich dreidimensionale Versionen des *hexatonic cycle* und der *Weitzmann-region* erstellt (Abb. 5), die darüber hinaus zusammen eine alternative Darstellung des *Cube Dance* ermöglichen.

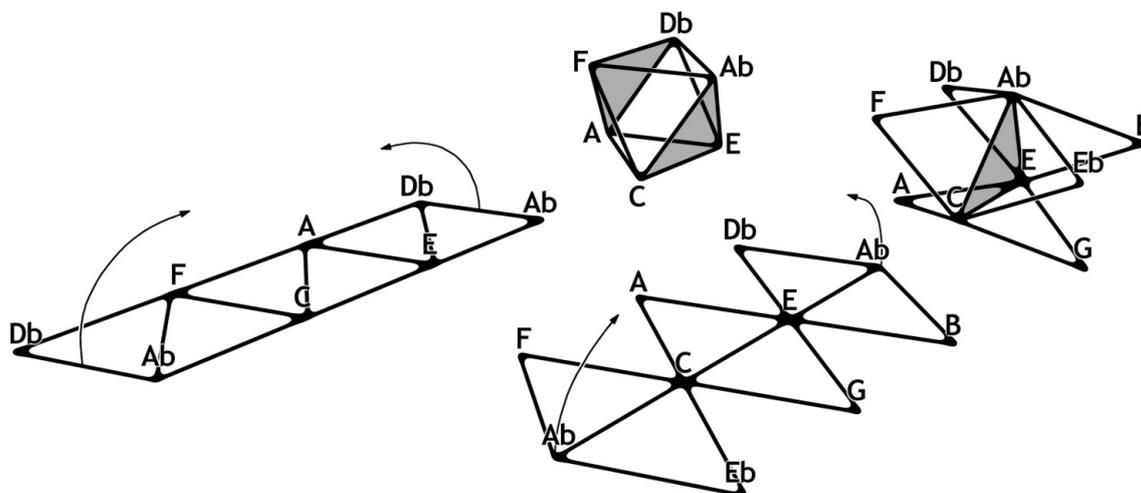
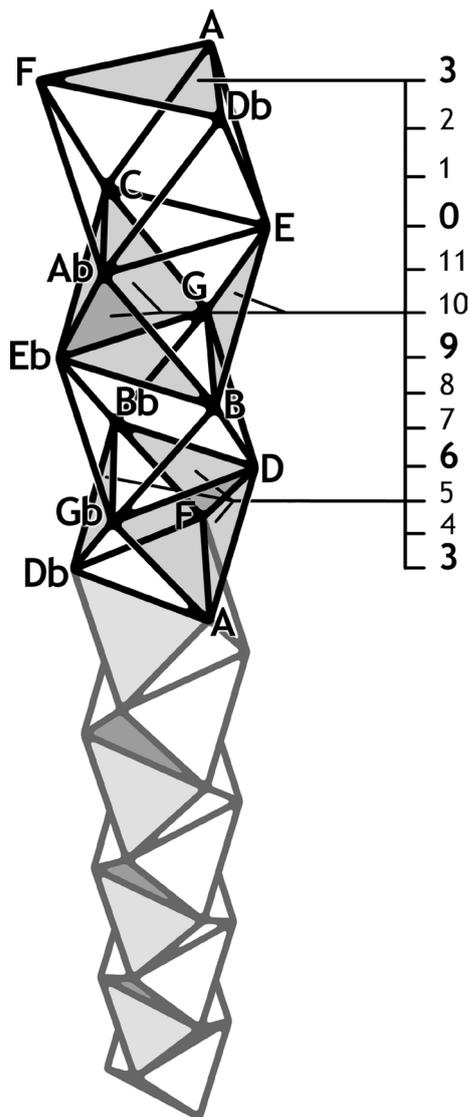


Abbildung 5: Dreidimensionale Modelle des *hexatonic cycle* und der *Weitzmann-region*

Diese Abbildung zeigt, wie man die entsprechenden Ausschnitte des Tonnetzes an ihren Enden ringförmig zusammenfügen kann. Dadurch erzeugen die dreigliedrigen Großterzachsen nach dem Zusammenschluss in ihrem Inneren ein neues Dreieck (im Bild grau), das den gesuchten übermäßigen Dreiklang repräsentiert. Im links gezeigten *hexatonic cycle*, der nun die Form eines liegenden Oktaeders hat, liegen alle Dreiecke mit **P**- und **L**-Verbindungen nebeneinander, der Austausch eines wechselnden Tones in einer solchen Verbindung kann als Rotation um die gemeinsame Achse wie im flachen Tonnetz vorgenommen werden. Es ist gut zu erkennen, dass jeder Dreiklang immer über jenen einen Ton ›im anderen Lager‹ verfügt, der chromatisch vom nächstverwandten übermäßigen Dreiklang abweicht. Die Partner einer **H**-relation liegen sich im Oktaeder ihrer Natur gemäß gegenüber. Die *Weitzmann-region* zur Rechten präsentiert sich als ›übermäßiges Dreieck‹ im Kern, umgeben von zwei fragmentarischen Tetraedern (die linke Hälfte taucht auch im abgebildeten *cycle* auf). Jede Akkordverbindung zwischen den am Rand gelegenen Dur- und Molldreiklängen in diesem Gebilde erfordert eine Rotation um eine Kante oder Ecke des Zentralsdreiecks. Abbildung 6 zeigt, wie sich vier *Weitzmann-regions* so ineinanderstecken lassen, dass ihre gezackten Kanten sich zu vollständigen *hexatonic cycles* fügen. Im Komplex ergeben die miteinander verschränkten Module eine unendliche *Hexentreppe* (benannt nach dem Papiermodell, das Kinder aus zwei Papierstreifen falten), die alle Eigenschaften des *Cube Dance* besitzt.

An der Spitze dieses Turmes liegt der *hexatonic cycle* aus Abbildung 5, unter ihm seine benachbarte *Weitzmann-region*. Den *voice-leading zones* entsprechen in diesem Turm vertikal geschichtete Ebenen: Alternierend je ein liegendes übermäßiges Dreieck (im Bild exemplarisch markiert *zone 3*), drei abwärts gerichtete ›Durdreiecke‹ (*zone 5*) oder drei aufwärts weisende ›Molldreiecke‹ (*zone 10*). Alle *relations* sind als reale Verbindungen von Dreiecken in dieser Darstellung enthalten – mit Ausnahme der **H**-relation, die wie oben schon besprochen aus zwei gegenüberliegenden Dreiecken besteht. Im Gegensatz zum *Cube Dance* stellt dieses Modell alle Akkorde als tatsächliche Tonkonstruktionen dar und macht damit auch alle gemeinsamen Töne ablesbar.

Abbildung 6: *Hexentreppe*

Außerdem gleicht es die Dur-, Moll- und übermäßigen Dreiklänge in ihrer Gestalt an, womit vor allem letztere im Sinne Carl Friedrich Weitzmanns zu ihrem Recht kommen.¹¹ Allerdings erfüllt es nicht den Anspruch, keinen Ton doppelt wiederzugeben, da sich der Turm nach vier Segmenten um 120° gedreht wiederholt und prinzipiell unendlich fortsetzen lässt (wie in der Graphik angedeutet). Es ließen sich natürlich vier Segmente zu einer Art Torus¹² einrollen – das würde aber die gleichseitigen Dreiecke dehnen und verzerren und durch die erzwungene innere Torsion um 120° auch die Lesbarkeit einschränken. In der dargestellten Form bietet dieses Modell alle Vorteile des *Cube Dance* und stellt darüber hinaus alle Dreiklänge inklusive des übermäßigen als dem Tonnetz entsprechende Dreiecke dar. Es schöpft die dritte Dimension voll aus, ohne die der *Cube Dance* (in geringem Maße) auch nicht auskam.

11 Vgl. Weitzmann 1853, 1f.

12 Mit der Form des Torus experimentierten auch Jack Douthett und Peter Steinbach, als sie den *Cube Dance* entwickelten. Sie gingen jedoch von einem Netz aus punktförmigen Dreiklängen und Relation-Achsen (**R**, **P** und **L**) aus (vgl. Douthett/Steinbach 1998, 248).

Beispiel 1: J. S. Bach, *Fantasia und Fuge g-Moll* (BWV 542), T. 31–35

Der reale Quintfall aus Johann Sebastian Bachs *Fantasia g-Moll* für Orgel (BWV 542, Bsp. 1) schöpft seinerseits die Dimensionen der *Hexentreppe* voll aus: Er bildet auf ihr eine Spirale, die sich gegen den Uhrzeigersinn in den *voice-leading zones* nach oben schraubt (Abb. 7).

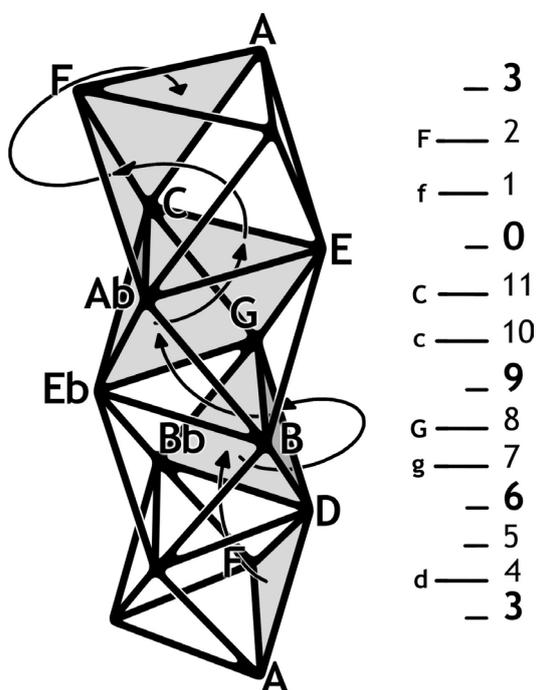


Abbildung 7: Realer Quintfall auf der *Hexentreppe*

Das Modell zeichnet jenes musikalische Moment nach, das gegenüber der katabasischen Pedalstimme und den sich stetig mehrenden \flat -Vorzeichen fast ins Hintertreffen gerät, nämlich die Stimmführung der fünf nacheinander eintretenden Oberstimmen, deren imitiertes Motiv sich chromatisch aufwärts arbeitet. Als beständige Gegenkraft zu den anderen beiden abwärts wirkenden Momenten erzeugt sie die Spannung, die sich nach dem Absinken nach des-Moll (einer ›mörderischen‹ Tonart, zumal in einer wohltemperierten, wenn nicht mitteltönigen Stimmung) in mehreren verminderten Dreiklängen entlädt, die enharmonisch das angerichtete Unheil wieder entspannen. Diese verminderten Dreiklänge weisen auf die Struktur der *Hexentreppe* hin, die zwar (unhörbar) auf dem eingebauten übermäßigen Dreiklang basiert, andererseits jedoch über einen Stufenabstand von einer kleinen Terz (der Abstand der *Weitzmann-regions* voneinander: drei *voice-leading zones*) verfügt. Auch der Ambitus der imitierten Chromatik weist dieses Intervall auf und zeichnet somit einen Schritt auf der Treppe nach, von einer *Weitzmann-region* zur nächsten.

2. DIE VIERKLÄNGE DES *TRISTAN-GENUS*

Die Akkorde des *Tristan-genus* (unter dieser Familie subsumiert Cohn Dominantseptakkorde und halbverminderte Septakkorde) haben eine Reihe von Verbindungsmöglichkeiten, die 1998 von Adrian Childs¹³ und Edward Gollin¹⁴ ausgelotet wurden. Cohn gibt Childs' Bezifferungen an, die sich auf Akkordwechsel mit zwei chromatischen Stimmwechseln beziehen (Bsp. 2).

The image displays two staves of musical notation. The top staff shows a sequence of seven chords: S^2 , $S^{3(2)}$, $S^{3(4)}$, S^4 , S^5 , S^6 , and RS^* . The bottom staff shows three chords: $C^{3(2)}$, $C^{3(4)}$, and C^6 . Arrows between the chords indicate the chromatic voice leading between them.

Beispiel 2: S- und C-relations

Die sechs **S**-Verbindungen beschreiben ähnlich wie die *Slide-relation* den parallel geführten Wechsel zweier Halbtöne – dass **S** in diesem Fall nicht für *slide*, sondern für *similar motion* steht, könnte man als kontrollierte Überschneidung zweier Bezeichnungssysteme beschreiben. Dabei kennzeichnet die hochgestellte Ziffer das gehaltene Intervall, im Fall von S^3 ist in Klammern zur Unterscheidung noch das wechselnde Intervall mit angegeben. Die **R**^{*}-Verbindung ist ein Sonderfall, weil sich in ihr nur eine Stimme um zwei Halbtöne bewegt. Die anderen **S**-relations weisen jedoch konsequent zwei Wechsel- und zwei Haltetöne auf. Akkordfolgen aus **S**-relations könnte man mit Sätzen vergleichen, in denen aufeinanderfolgende Wörter zwei gleichbleibende Buchstaben enthalten. Wie die herkömmlichen *Neo-Riemannian relations* vollziehen auch die sieben oberen *relations* konsequent einen Wechsel des Geschlechts. Diese Eigenschaft fehlt Childs' drei **C**-relations (*contrary motion*, d. h. zwei Stimmen in Gegenbewegung), was auch Cohns Grund gewesen sein mag, sie nicht zu erwähnen. Diese drei *relations* vermitteln zwischen den identischen Akkorden auf den Stufen eines verminderten Septakkords. Dabei sind $C^{3(2)}$ und $C^{3(4)}$ inversibel, während C^6 seiner eigenen Umkehrung entspricht. Die Vierklänge-*relations* lassen sich ebenso wie die Dreiklänge-*relations* in zwei Gruppen unterteilen, die später noch von Bedeutung sein werden: $S^{3(2)}$, $S^{3(4)}$, R^* und S^6 bilden die *Boretz-group transformations*, die sich in den Grenzen der *Boretz-region*¹⁵ bewegen (vergleichbar mit der *Weitzmann-region*). Gemeinsam mit einer Verbindung, die Cohn nach Childs den *octatonic pole*¹⁶ nennt, ergeben S^2 , S^4 und S^5 die *octatonic-group transformations* (*O-group*), die Progressionen innerhalb eines *octatonic cycle*¹⁷ erzeugen. Graphisch darstellen lässt sich die *Boretz-region*, nach dem Prinzip des *Weitzmann water bugs*, als Spinne (*Boretz spider*) mit acht Beinen: Der Körper als vermindertes Septakkord schart vier halbverminderte und vier Dominantseptakkorde um sich. Kombiniert mit den *Octa*

13 Childs 1998, 186.

14 Gollin 1998, 201.

15 Benannt nach Benjamin Boretz, der in einer Analyse des *Tristan*-Vorspiels erstmals eine Gruppe von halbverminderten und Dominantseptakkorden beschrieb, die jeweils um nur einen Ton von einem zentralen verminderten Septakkord abweichen, vgl. Boretz 1972.

16 *Octatonic pole*: C^7/es^{07} ; die beiden Akkorde enthalten gegensätzliche Ausschnitte der oktatonischen Skala und stehen sich ›polar‹ gegenüber, vgl. Cohn 2012, 155.

17 Im Bereich des *Tristan-genus* das Pendant zum *hexatonic cycle*.

Towers (graphische Darstellung des *octatonic cycle* als zweidimensional verflachter Rhombendodekaeder) von Jack Douthett und Peter Steinbach¹⁸ ergibt sich das ebenfalls auf ihren Gedanken¹⁹ aufbauende Modell des *4-Cube Trio* (Abb. 8).

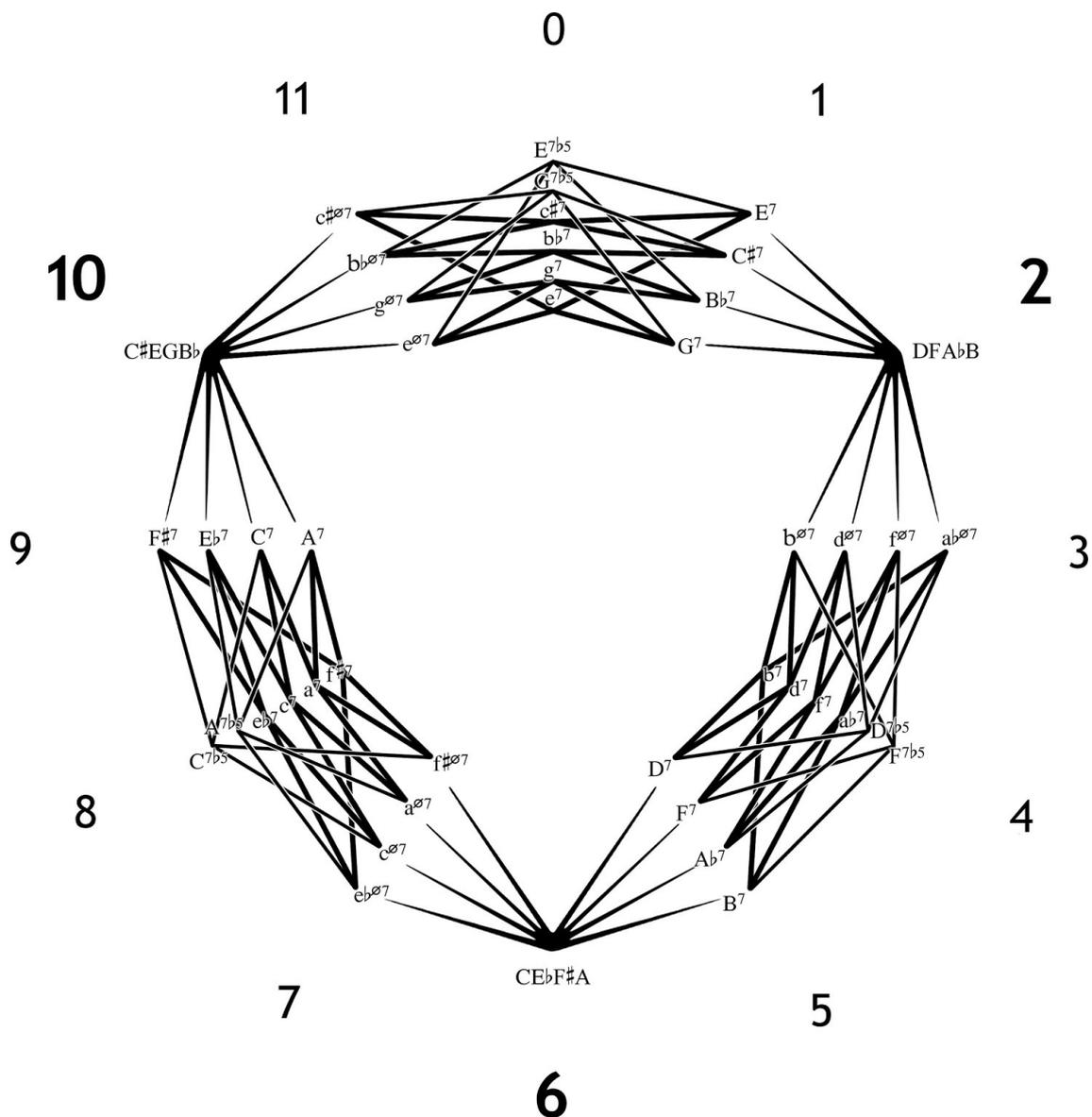


Abbildung 8: *4-Cube Trio*

Dieses Modell unterteilt die Vierklänge nach dem Prinzip des *Cube Dance* in *voice-leading zones* und gruppiert sie gleichzeitig in *Boretz-regions* und *octatonic cycles* (einem Spinnennetz ähnliche Gebilde, mit sechs weiteren Akkorden in ihrer Mitte). Da die oben beschriebenen *relations* nur Operationen mit einer *voice-leading distance* von zwei *working units* gewähren (oder im Fall von **C** keiner *working unit*), müsste das Modell eigentlich nur ungeradzahlige Zonen enthalten. Douthett und Steinbach haben jedoch in ihrem Modell der *Power Towers* bereits vier kleine Mollseptakkorde ergänzt, die zwischen halbverminderten und Dominantseptakkorden vermitteln bzw. den virtuellen Zwischen-

¹⁸ Douthett/Steinbach 1998, 246.

¹⁹ ›Power Towers‹, vgl. ebd., 256.

schritt darstellen, der innerhalb einer S^n - oder C^n -Relation liegt. Cohn fügte noch den Dominantseptakkord mit tiefalterierter Quinte hinzu, der acht weitere Verbindungen innerhalb des *octatonic cycles* ermöglicht. Er taucht aufgrund seiner enharmonischen Doppeldeutigkeit nur sechsmal im ganzen Modell auf, erlaubt deswegen aber auch doppelt so viele Durchgänge von einer Seite eines *cycle* zur anderen. Diese addierten Vierklänge füllen die ansonsten leerstehenden Zonen 0, 4 und 8, sodass das komplette *4-Cube Trio* alle durch einen Halbtonschritt benachbarten Akkorde über Achsen verbunden darstellt, alle Fortschreitungen mit mehr als einer *working unit* hingegen als getrennte, nur virtuell verbundene Akkorde. So muss man von E^7 vier *working units* zurücklegen, bis man den *octatonic pole* g^{07} erreicht, der nur zwei *voice-leading zones* entfernt liegt – dafür stehen aber auch 18 Pfade zur Auswahl.

3. DAS 3D-TONNETZ

Ein lästiger Umstand des *4-Cube-Trio* und der ihm zugrunde liegenden Modelle, der die Vierklänge in der *NRT* bislang etwas ins Abseits gestellt hat, ist ihr hoher Grad an Abstraktion. Während den triadischen Überlegungen in jeder Hinsicht das *Tonnetz* als Grundlage dient, vermisst man bei den Vierklängen eine vergleichbare fassliche Basis. Allerdings verweist Cohn beiläufig auf den bereits erwähnten kurzen Artikel von Edward Gollin, in dem dieser die Struktur eines dreidimensionalen *Tonnetzes* vorstellt.²⁰ Es weist alle notwendigen Eigenschaften seines zweidimensionalen Bruders transferiert in den Raum auf (Abb. 9).

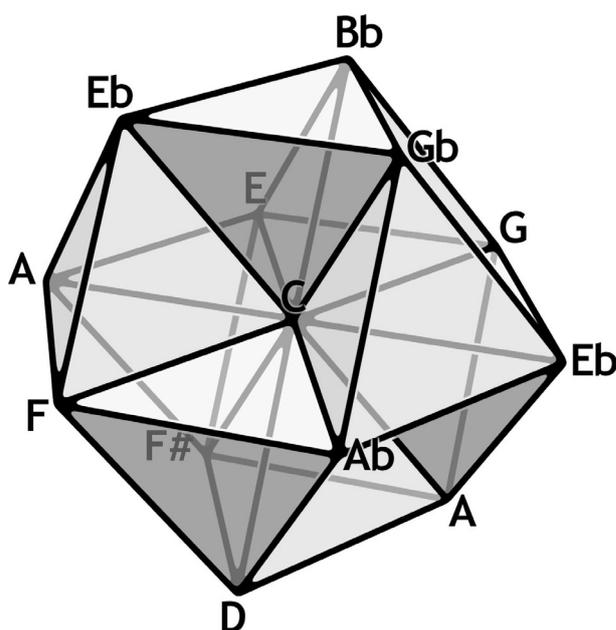


Abbildung 9: 3D-Tonnetz-Ausschnitt um C

Dieser Ausschnitt stellt die direkte Umgebung des Tones *c* dar, die aus acht Vierklängen besteht: Vier Dominantseptakkorde und vier halbverminderte Septakkorde. In der horizontalen Ebene kann man einen liegenden Ausschnitt des triadischen *Tonnetzes* erkennen, der sich ebenfalls um *c* erstreckt. Jeder Vierklang erscheint in der Form eines Tetrae-

²⁰ Gollin 1998, 198.

ders mit vier Tönen an den Spitzen, der aus dem c in der Mitte entspringt; vorne rechts sieht man beispielsweise As^7 , aufwärts weisend, in der Mitte oben c^{07} , mit der Spitze abwärts gerichtet.²¹ In diesem Ausschnitt sind alle möglichen *relations* von Akkorden des *Tristan-genus* enthalten, die über mindestens einen gemeinsamen Ton verfügen, d. h. alle Tetraeder haben entweder eine gemeinsame Achse – also zwei geteilte Töne – oder nur das c in der Mitte gemeinsam, drei gemeinsame Töne kommen in der Struktur dieses *3D-Tonnetzes* nicht vor. Ausgenommen davon ist mit nur einem Ganztonwechsel die **R*-Relation**, die im Netzausschnitt dreimal erscheint: As^7/c^{07} , D^7/fis^{07} und F^7/a^{07} . Diese drei Verbindungen weisen *syntonic images* (identische Töne an verschiedenen räumlichen Positionen) auf, die an den Rändern des Ausschnitts zweimal vorkommen, wodurch die Partner jeweils drei gemeinsame Töne haben, statt, wie es auf den ersten Blick scheint, nur zwei. Die dritte Verbindung weicht in ihrer Struktur ab: Die ersten beiden Tetraederpaare sind über zwei Töne, die immer auf der Tritonus-Achse $Fis-C-Ges$ liegen, verbunden – sie orientieren sich also an dieser Achse, die schon im begrenzten Umfeld um den Ton c die enharmonischen *syntonic images* Fis und Ges generiert. Das letzte Paar F^7/a^{07} hat nur das zentrale c gemeinsam, dafür verfügt es über zwei *syntonic images*, die gemeinsamen Töne e und a , die auf zwei parallelen Tritonus-Achsen liegen. Eine zweite Anomalie findet sich bei genauerer Betrachtung der **S⁶-relation**: Die Verbindung As^7/fis^{07} teilt ebenfalls nur den Ton c und liegt ebenso an der problematischen Tritonus-Achse (näheres zu dem Verhältnis dieser beiden *relations* folgt im kommenden Abschnitt). Vorerst möchte ich veranschaulichen, welchen Platz die Tritonus-Achse im Gefüge des *3D-Tonnetzes* einnimmt (Abb. 10).

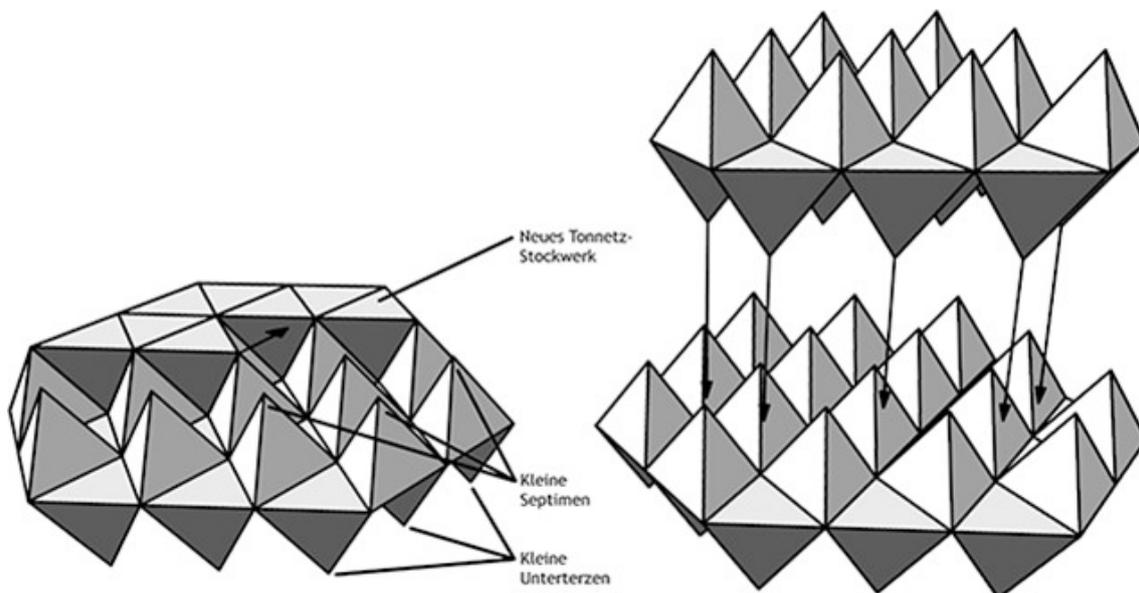


Abbildung 10: Konstruktion des *3D-Tonnetzes*

Es gibt zwei Wege, auf Basis des *Tonnetzes* ein *3D-Tonnetz* zu errichten. Der erste besteht darin, über jedem Dur-Dreieck eine Pyramidenspitze mit der kleinen Septime zu errichten (hellgrau/weiß) und unter jeden Molldreiklang eine kleine Unterterz (dunkel-

21 Die Bezifferung der Septakkorde richtet sich nach der amerikanischen Schreibweise.

grau) zu hängen,²² sodass eine Art ›doppelseitiger Eierkarton‹ entsteht (Abb. 11). Es ist sowohl möglich, die Spitzen der Pyramiden zu verbinden und ein um eine kleine Septime transponiertes *Tonnetz* zu erzeugen, als auch von oben und unten Kopien des Eierkartons mit den Spitzen in die Täler des Originals zu senken; sie fügen sich nahtlos aneinander, aber es bleiben naturgemäß Hohlräume in Oktaederform. Auf beide Arten werden neue *Tonnetz*-Stockwerke erzeugt, von denen aus enharmonisch unendlich weitergebaut werden kann.

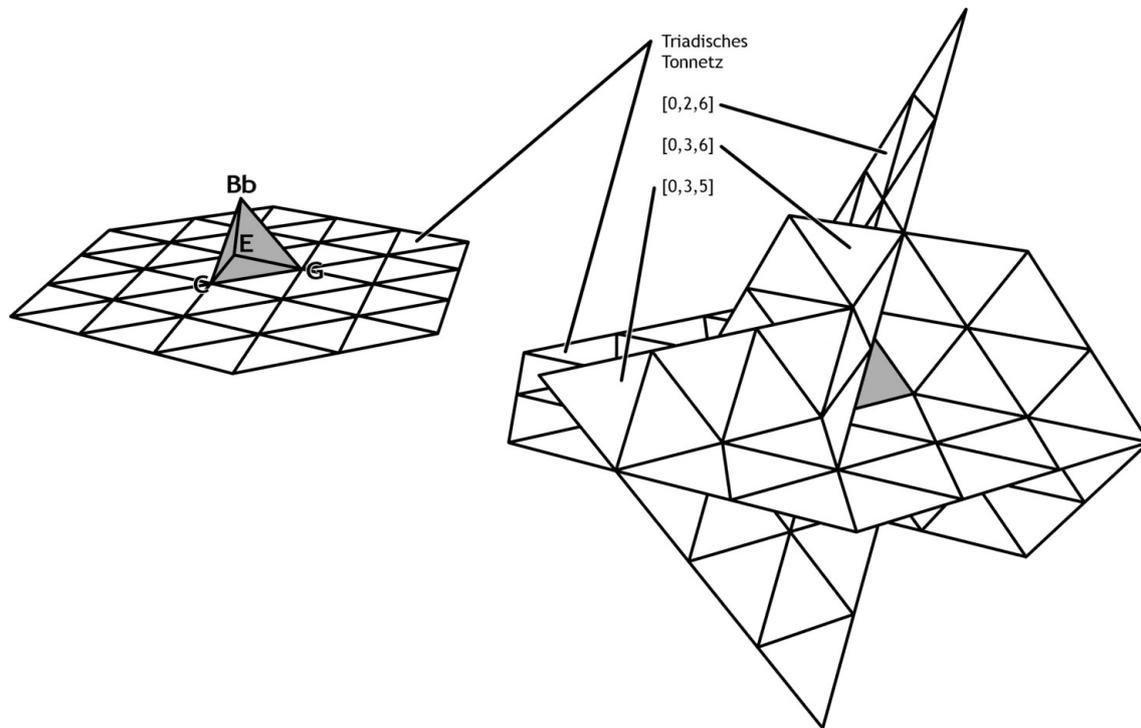


Abbildung 11: Verschränkte *Tonnetze* um einen Tetraeder

Der zweite Weg ist umständlicher und widerstrebt dem bequemen Denken in Schichten, kann aber die Struktur des *3D-Tonnetzes* tiefer gehend veranschaulichen: Ein Tetraeder (z. B. C^7 , vgl. Abb. 11 links) ist umgeben von seinen vier Tönen und umfassen von den sechs Intervallachsen, die alle in ihm enthaltenen Intervalle darstellen $[2,3,3,4,5,6]$.²³ Außerdem ist er ummantelt von vier Flächen, die jene vier Dreiklänge darstellen, die in ihm enthalten sind (CEG, CEB, CGB, EGB). Der Dreiklang CEG ist die Ausgangsfläche des (liegenden) triadischen *Tonnetzes*. Es lassen sich aber ebenso an den drei anderen Flächen diagonal im Raum stehende *Tonnetze* erzeugen (Abb. 11 rechts), denen andere *sets* zugrunde liegen: $[0,2,6]$, $[0,3,5]$, $[0,3,6]$.²⁴ Die vier den Tetraeder umgebenden Netze sind ineinander verschränkt und lassen sich im Raum weiter fortsetzen, sodass sie das *3D-Tonnetz* mitsamt Vierklängen erzeugen. Das *3D-Tonnetz* ist also nicht nur eine Übersteigerung des zweidimensionalen Prinzips, es ist ein räumliches Produkt aus zweidimensionalen *Tonnetzen*.

22 Gollin würde es die Unterseptime nennen – in der Tradition Moritz Hauptmanns, der erklärte, die fünfte Stufe sei der Grundton des Molldreiklangs, vgl. Gollin 1998, 199.

23 Notation der Intervalle in Halbtonschritten.

24 Cohn hat bereits über *Tonnetze* mit anderen *sets* als $[0,4,7]$ gearbeitet, vgl. Cohn 1997. Gollin hat dieselben Ideen auf das *3D-Tonnetz* angewandt, vgl. Gollin 1998, 202f.

Aus der (willkürlichen bzw. allenfalls aus dem Obertonspektrum abgeleiteten) Wahl des Dominantseptakkordes [0,4,7,10] als Basis des *3D-Tonnetzes* folgt einerseits, dass eines der vier enthaltenen *2D-Tonnetze* nicht wie gewohnt das chromatische Total abdeckt, sondern nur über die vier Töne des verminderten Septakkordes verfügt; dieses ›sterile‹ Netz [0,3,6] besteht nur aus verminderten Dreiklängen, die umkehrungsgleich sind und beinhaltet darüber hinaus eine Tritonus-Achse, die bereits nach zwei Schritten wieder ein *syntonic image* repetiert. Andererseits schränkt die Wahl des *Tristan-genus* die direkte Umgebung ein, die nicht die kleine Sekunde und die große Septime enthält – jene zwei Intervalle, die in [0,4,7,10] nicht vorkommen. In den zwölf Tönen, die das *c* in Abbildung 9 umgeben, sind folglich die drei Töne *ges*, *es* und *a* doppelt vorhanden, da sie alle auf dem verminderten Netz um *c* liegen. Die ausgesuchten \mathbf{R}^* -Verbindungen F^7/a^{07} , D^7/ges^{07} und As^7/c^{07} liegen alle an dieser problematischen Ebene und ergeben trotz räumlich verschiedener Struktur den gleichen Akkordwechsel.

Gollin hat das *3D-Tonnetz* als mathematisches Gerüst vorgestellt, in das neben dem *Tristan-genus* jedes beliebige *set* aus vier Tönen gemeinsam mit seinem dualistischen Partner²⁵ eingefügt werden kann. Vier weitere Möglichkeiten fallen ins Auge:

Erstens die beiden Allintervallklänge, hier exemplarisch [0,1,3,7]: Seine namensgebende Form bildet eine Umgebung aus, in der nur der Tritonus doppelt vorkommt.²⁶ In dieser kaum von *syntonic images* getrübt, friedvollen Umgebung gedeihen sechs *S-relations*, von denen sich nur eine, nämlich \mathbf{S}^3 , in zwei parallelen Halbtonschritten fortbewegt – \mathbf{S}^1 , \mathbf{S}^2 , \mathbf{S}^4 und \mathbf{S}^5 haben eine *similar motion* in Kleinterz-, und \mathbf{S}^6 sogar in Quartschritten.

Zweitens der hartverminderte Septakkord oder übermäßige Terzquartakkord [0,4,6,10]. Da er umkehrungsgleich und außerdem ein Ausschnitt der Ganztonleiter ist, erzeugt er ein sechstöniges *3D-Tonnetz*, das an ›Sterilität‹ nur noch durch das verminderte Netz [0,3,6,9] überboten wird.

Drittens und viertens der kleine Mollseptakkord [0,3,7,10] und der große Durseptakkord [0,4,7,11] (Bsp. 3). Sie sind ebenfalls umkehrungsgleich und erzeugen um einen Ton somit eine direkte Umgebung, in der nur vier Akkordtranspositionen je zweimal auftauchen.

Beispiel 3: Verbindungen von kleinen Moll- und großen Durseptakkorden

Dieses Netz stellt zuverlässig alle intern möglichen Verbindungen mit zwei oder drei wechselnden Tönen dar, erzeugt jedoch auch zwei ›Homophone‹,²⁷ die trotz räumlicher Veränderung keinen einzigen Ton des Ausgangsakkords ändern.

25 Der dualistische Partner eines Akkordes enthält die gleichen Intervalle in umgekehrter Reihenfolge, also sozusagen von oben nach unten gelesen.

26 Wie im vorherigen Absatz dargelegt, schließt die Existenz einer Tritonus-Achse jede andere Möglichkeit aus: zweimal oder gar nicht.

27 Nach einem Begriff aus der Kryptographie (vgl. Singh 2001, 74).

4. HEART CUBES

Es ist nicht zu leugnen, dass das 3D-Tonnetz beträchtliche räumliche Vorstellungskraft erfordert, insbesondere wenn der Maßstab über die Grenzen der direkten Umgebung eines Tons hinauswächst. Ich schlage darum ein transformiertes Netz vor, in dem die Tetraeder zu Punkten zusammengezogen und ihre **S**-Verbindungen als Achsen dargestellt sind (Abb. 12); das Resultat trägt in Anlehnung an die fantasievoll betitelten amerikanischen Modelle den Namen *Heart Cubes*.

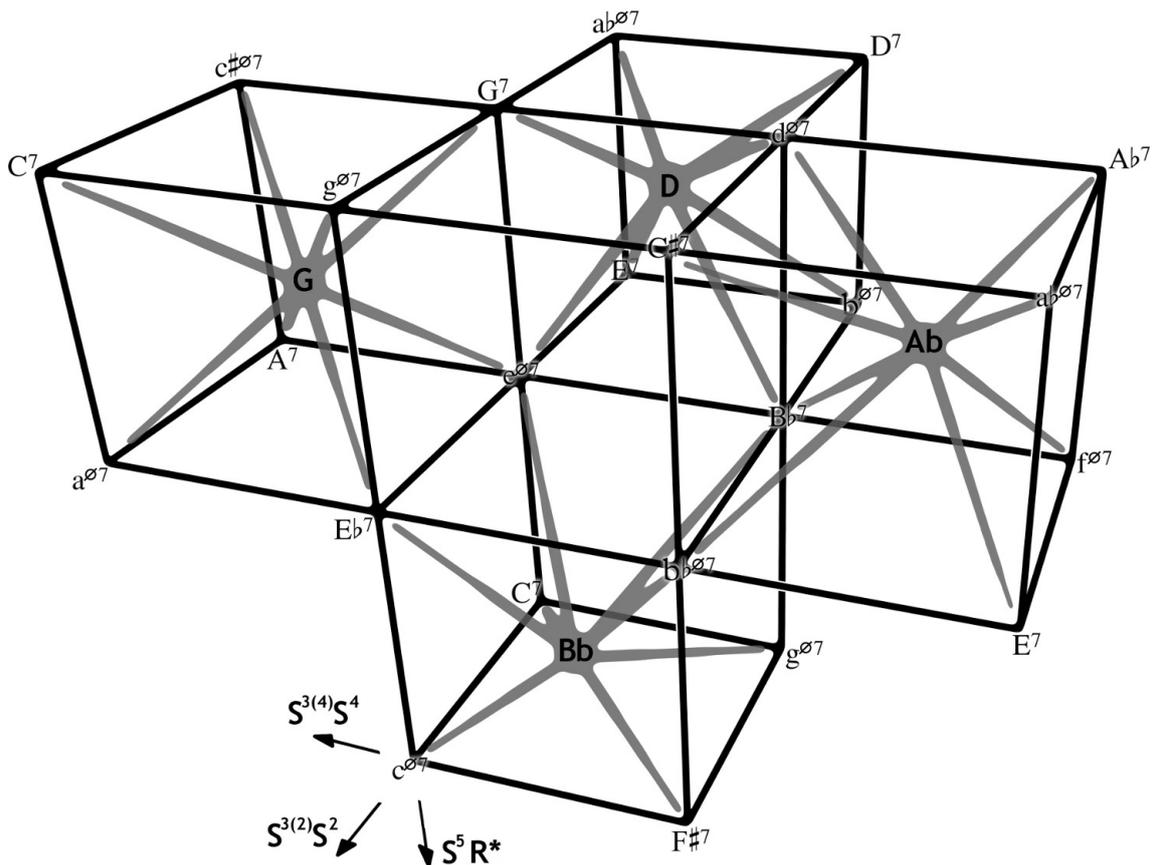


Abbildung 12: *Heart Cubes*

Der Ausschnitt zeigt vier Töne mit ihrer jeweiligen direkten Umgebung. Jede hat die Form eines Würfels, der in seiner Mitte als *Heart* jenen Ton trägt, den die acht Akkorde an den Ecken gemeinsam beinhalten. Fortlaufend aneinander gereiht bilden die *Heart Cubes* mit ›herzlosen‹ Würfeln²⁸ alternierend ein dreidimensionales Schachbrettmuster aus. Von jedem Septakkord streben auf den sechs Achsen sechs verschiedene **S**-relations fort (jede Achse besteht aus zwei sich abwechselnden *relations*, je eine aus der *Boretz*- und eine aus der *O-group*), allerdings fehlt **S**⁶, abgebildet ist hingegen **R**^{*}. Die Diagonalen auf den quadratischen Würfelflächen lassen sich durch zwölf verschiedene Kombinationen aus je zwei **S**-relations (oder **R**^{*}, aber nicht **S**⁶) ausdrücken, die verbleibenden drei Kombinationen laufen in einer Richtung alternierend auf einer Achse. Es fehlen der *octatonic pole* und **S**⁶; ersterer liegt auf zwei Raumdiagonalen im herzlosen Würfel, letztere auf die glei-

28 Das Pendant zu den angesprochenen oktaederförmigen Hohlräumen im 3D-Tonnetz.

che Weise diagonal in den *Heart Cubes*, z. B. die Verbindung A^7/g^{07} im G-Würfel.²⁹ In ihr wird der kritische Ton *cis* enharmonisch zu *des* umgedeutet, was dafür sorgt, dass die S^6 -relation nicht wie alle anderen S - R^* -relations auf einer der Würfelkanten liegt, sondern (mit zwei klingend aber drei enharmonisch/räumlich verschiedenen Tönen) durch eine größere räumliche Distanz dargestellt ist. S^6 allein erzwingt eine enharmonische Umdeutung, die bei allen anderen relations nicht notwendig ist. Aus diesem Grund liegt S^6 nicht auf einer der Achsen; das Modell der *Heart Cubes* kann besser als das *3D-Tonnetz* diese Anomalie von S^6 und R^* veranschaulichen.

Obwohl lediglich in viel entfernteren relations – Korrelationen ohne relativ tonartgebundenes Erscheinungsbild – verknüpft, lassen die vier internen Dominantseptakkorde A^7 , C^7 , Es^7 und G^7 um den Ton *g* den erheblichen Einfluss der dualistischen Lehre spüren. Ihre Grundtöne ruhen auf vier Tönen, die einen halbvermindertem Septakkord ergeben. Umgekehrt ergeben a^{07} , e^{07} , cis^{07} und g^{07} einen flach liegenden Dominantseptakkord. Die beiden Partner zitieren sich gegenseitig als Akrostichon³⁰ – diese hübsche Eigenart rührt her vom Zusammenhang der vier möglichen Transpositionen eines Vierklangs um den Ton *g*, die den verwendeten Akkord zwingen, sein eigenes Spiegelbild als Fußstapfen zu hinterlassen, und ist ein gutes Exempel dafür, dass schon Weitzmanns dualistische Äußerungen, die auf Hauptmann Bezug nahmen, nicht ohne Grund waren und auf innere Strukturen hinwiesen, die essentiell für unser Tonsystem sind.

In den *Heart Cubes* tauchen auch Childs' *C-relations* innerhalb der Flächendiagonalen auf, und bestätigen damit scheinbar Cohns Entscheidung, sie nicht zu erwähnen: Sie lassen sich als Kombination darstellen, z. B. $C^{3(4)}=S^2S^5$. Allerdings ist diese Kombination widersinnig, da die beiden *S-relations* zusammen eine viel größere virtuelle Stimmführungsarbeit erzeugen als sich in $C^{3(4)}$ tatsächlich vollzieht.³¹ Die drei *C-relations* sind insofern von Bedeutung, als sie jene drei Modulationen darstellen, die die drei *Boretz-group transformations* ($S^{3(2)}$, $S^{3(4)}$ und S^6) und die drei *O-group transformations* (S^2 , S^4 und S^5) intern miteinander kombiniert ergeben. Die *C-relations* bewegen sich also ausschließlich in den Grenzen einer *Boretz-region* bzw. eines *octatonic cycle*.³²

5. DIE VIERKLANGS-SPINDEL

Die *Heart Cubes* liefern nicht mit allen sets befriedigende Ergebnisse; statt aus Dominantseptakkorden aus kleinen Mollseptakkorden konstruiert, stellt das gleiche Gitter zwar in der Horizontalen den Vorrat an möglichen relations dar, diese Ebene wiederholt sich jedoch exakt kopiert in der Vertikalen: Die oben genannten ›Homophone‹ sorgen dafür, dass die senkrechten Achsen jeweils nur einen einzigen duplizierten Akkord wiederholen. Nichtsdestotrotz haben auch der kleine Mollseptakkord, der große Durseptakkord, der hart verminderte Septakkord und einige mehr ihren festen Platz in der Musik, und es ist bedauerlich, dass sowohl das *3D-Tonnetz* als auch die *Heart Cubes* nicht mit ausreichenden Fähigkeiten ausgestattet sind, alle diese Klänge in Verbindung miteinander zu

29 Aus dualistischer Sicht sind diese beiden Akkorde Zwillinge, gespiegelt um den zentralen Ton *g*.

30 Man fühlt sich unwillkürlich an das Kapitel ›Kontrakrostipunktus‹ aus Douglas R. Hofstaedters *Gödel, Escher, Bach* erinnert (Hofstaedter 1979, 81f.).

31 Dies steht im Gegensatz zu den vergleichbaren triadischen Verbindungen C-Dur/E-Dur und C-Dur/As-Dur, die sich korrekt als **L/P** und **P/L** darstellen lassen.

32 Im triadischen Bereich gibt es nur eine *C-relation*, die identisch ist mit **L/P**.

bringen. Cohn hat den Versuch gemacht, das *4-Cube Trio* um zwei dieser Akkorde zu erweitern; ich möchte hier meine Weiterentwicklung, die *Vierklangs-Spindel*, vorstellen (Abb. 13). In ihr ist das ganze System auch noch um andere Vierklänge, z. B. den großen Durseptakkord, ergänzt.

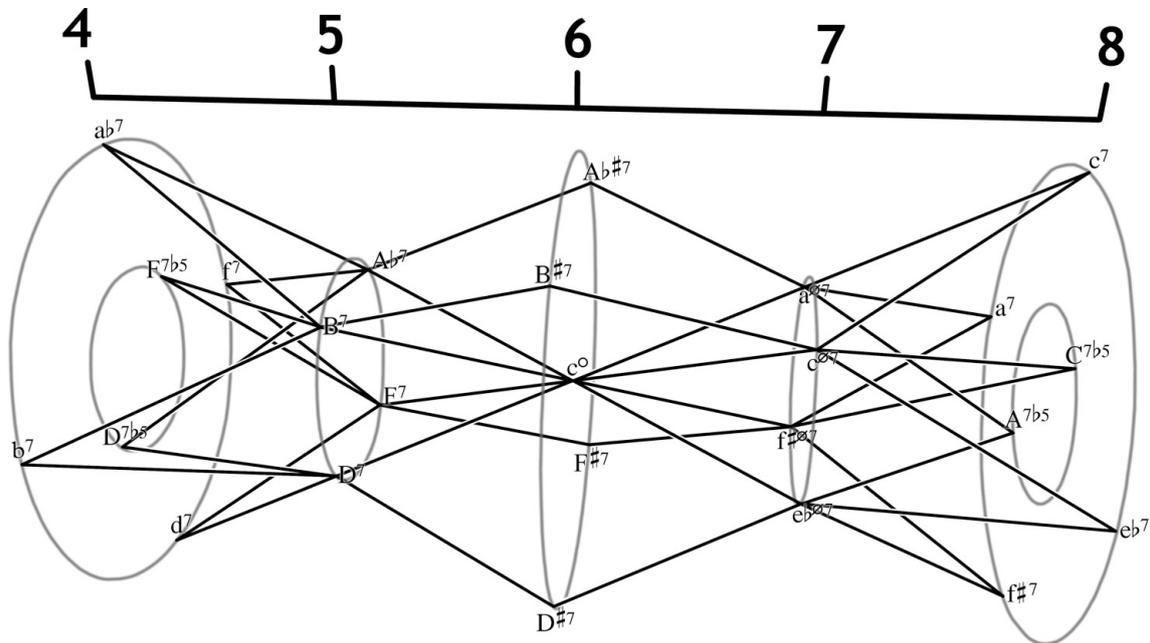


Abbildung 13: Die *Vierklangs-Spindel*

Dieser Ausschnitt aus der *Vierklangs-Spindel* bildet ein Drittel der zwölf *voice-leading zones* ab. Gruppirt um den verminderten Septakkord c° stellt sie fünf Klassen von terzgeschichteten Vierklängen ins Verhältnis. Durch Achsen verbundene Akkorde weichen stets um einen Halbtonschritt voneinander ab, die *S-relations* sind also indirekt als Kombinationen aus zwei Schritten zwischen den ungeradzahligen Zonen wiedergegeben. Zwischen den Zonen 5 und 7 erstrecken sich die *Boretz-group transformations* – die R^* -*relation* hat einen vollwertigen Platz unter ihren Gruppenmitgliedern. In der nicht vollständig in der Abbildung enthaltenen *O-group*, zwischen den Zonen 3 und 5, liegt der *octatonic pole* als diagonale Verbindung, die nur über verschiedene Pfade aus vier Halbtonschritten hergestellt werden kann. R^* und der *octatonic pole* ergänzen so die jeweils drei *S-relations* einer *group*. Das Spindelmodell stellt also verwandte *relations*, die im *3D-Tonnetz* aufgrund der spezifischen Gestalt der *Tristan-genus*-Vierklänge divergieren, gleichberechtigt nebeneinander.

Darüber hinaus eröffnet es die Möglichkeit, auch Verbindungen von halbverminderten zu dominantischen Septakkorden über große Durseptakkorde darzustellen, die einen Weg alternativ zum Gang durch den verminderten Septakkord bilden (Abb. 14).³³ Konkret heißt das: Lässt man die beiden Halbtonschritte einer *relation* aus der *Boretz-group* sukzessive eintreten, entsteht als Durchgangsakkord entweder ein vermindertes oder ein großer Dur-Septakkord. Zwischen den asymmetrischen (über zwei Zonen benachbarten) Akkorden des *Tristan-genus* kann im Spindelmodell prinzipiell auf zwei Wegen vermittelt

33 Douthett und Steinbach haben bereits darauf hingewiesen, dass man die *O-groups* im *4-Cube-Trio* auch mit anderen beliebigen Drei- und Vierklängen als dem verminderten Septakkord verbinden könne. Vgl. Douthett/Steinbach 1998, 255.

Dieser schematische Spindelquerschnitt ist flach um die Mittelachse herum zusammengefaltet, um die Verbindung zwischen den Vierklangsklassen im Allgemeinen abzubilden. Dabei sind auch diagonale Verbindungen übereinandergelegt, die zu gleichen Akkordklassen, nicht aber zu tatsächlich identischen Klängen führen. (Ein konkreter Dominantseptakkord kann nicht über drei Wege mit einem anderen konkreten halbverminderten Septakkord zwei Zonen höher verbunden werden, wie die drei Pfade im Kern missverständlicherweise nahelegen, sondern nur über drei Wege mit drei unbestimmten Akkorden dieser Gattung!) In den oberen Sphären schweben ›entrückt‹ der Bartók-Akkord und der übermäßige Dreiklang, der mit dem verminderten Septakkord die Ränder eines Feldes der chromatischen Stimmführung bildet. Natürlich ließe sich dieses vereinfachte Schema wieder in eine dreidimensionale Spindel auseinanderfalten, zu viele dargestellte Akkordklassen lassen das Modell aber unhandlich werden; in der praktischen Analyse bietet es sich an, nur die jeweils benötigten Ringe zu verwenden. Der Chopin-Akkord mit großer Sexte fehlt nicht ohne Grund: Er lässt sich nur über mindestens zwei Halbtonschritte mit den anderen kategorisierten Vierklängen (außer dem kleinen Chopin-Akkord) verbinden. Das hängt unter anderem mit seinem *set* [0,1,3,7] zusammen: Er ist ein Allintervall-Akkord, dem das weiter oben beschriebene *Tonnetz* mit besonders vielfältigen *S-relations* zugrunde liegt.

Der fal - sche Fleiß, die Ei - tel-keit, was kei - nem mag er - la - ben, dar-
 in der Tag das Herz zer-streut, liegt al - les tief be - gra - ben.

Ü⁷ Ü⁵ G^{#4} g^{#ø7} A^{#b6} E⁷ E⁷ E^{7b5} A⁷

[0, 1, 3, 7] [0, 4, 6, 7] [0, 2, 4, 8]

Beispiel 4: Hugo Wolf, *Einklang* (Sechs Geistliche Lieder), T. 9–16

Ein Beispiel für diese unterschiedliche Kompatibilität der beiden Chopin-Akkorde ist der Chorsatz »Einklang« aus Hugo Wolfs Zyklus *Sechs geistliche Lieder* (1881) nach Gedichten von Joseph von Eichendorff (Bsp. 4). Im Mittelteil (T. 9–16) thematisiert Wolf den Chopin-Akkord, der dreimal als Durchgang in verschiedenen Umkehrungen auftaucht. In Takt 10 wird er als großer Chopin-Akkord auf *d* eingeleitet von zwei typischen *S-relations* (aus der *O-group*), die eine Transposition um eine kleine Terz aufwärts (also innerhalb des *octatonic cycle*) bewirken, und eingerahmt von zwei atypischen Verbindungen, die im Sinne Childs' als *C-relations* verstanden werden können, da sie beide aus zwei entgegengesetzten Halbtonschritten bestehen – die Bezifferung gibt das gehaltene Intervall und in Klammern die wechselnden Intervalle an. Das gleiche *set* des großen Chopin-Akkords [0,1,3,7] wird in der dualistischen Umkehrung [0,4,6,7] in Takt 15 noch einmal ge-

streift,³⁵ diesmal vom Dreiklang G-Dur ausgehend, der sich im Gegensatz zu den Vierklängen mit nur einem Halbtonschritt anbinden lässt. Es handelt sich kaum um einen Zufall, dass Wolf diese beiden Akkorde im subdominantischen B-Teil effektiv und leuchtkräftig auf der ersten und vierten Stufe positioniert hat. Als Bekräftigung dient der Halbschluss in den Takten 15 bis 16, in denen Wolf die bessere chromatische Anbindungsfähigkeit des kleinen Chopin-Akkords exerziert (er erscheint nicht in der gewohnten Schichtung). In den Kästchen in Beispiel 4 sind die jeweiligen *voice-leading zones* der Akkorde angegeben; solch dichte Progressionen lassen sich gut in einer Spindel wiedergeben (Abb. 15).

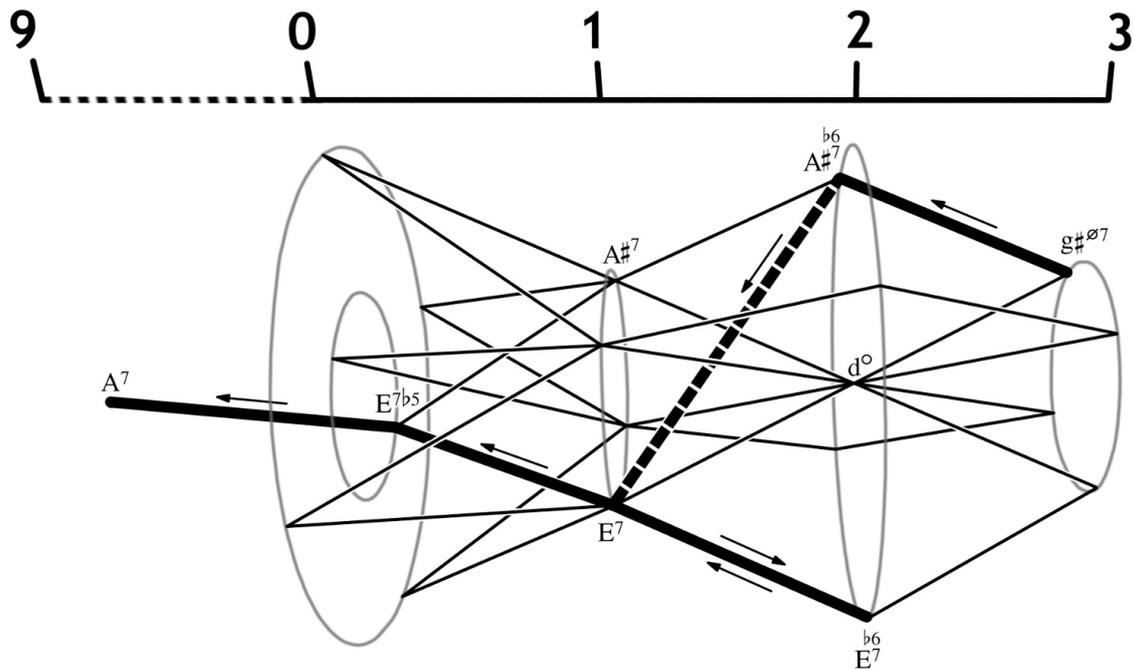


Abbildung 15: Chromatischer Halbschluss in der Spindel

In diesem Fall wurde der Ring mit großen Durseptakkorden durch den benötigten Ring mit kleinen Chopin-Akkorden ersetzt – alle nicht benötigten Akkordringe sind ausgeblendet. Bis auf den schließenden Quintfall (*voice-leading zone* 12 nach 9) liegen alle Akkorde in benachbarten Zonen. Nur der Wechsel Ais^{7b6}/E^7 läuft diagonal durch die Spindel;³⁶ abgesehen von ihm – und einem kurzen a-Moll-Quartsextakkord, der aber eher als Durchgangsergebnis eines angetauschten Stimmtauschs zwischen Bass und Tenor zu betrachten ist – beinhaltet die Kadenz ausschließlich Vierklänge, die über einen einzigen Halbtonschritt verbunden sind. Nachdem der B-Teil endlich auf der Subdominante angekommen ist, führt diese Passage mit ihrem Kreisen in einem doppel dominantischen Feld zur Dominante A-Dur und damit in die variierte Reprise des A-Teils zurück.

35 Es ist anmerkwürdig, dass Wolf dazwischen in den Takten 13 und 14 zwei übermäßige Dreiklänge setzt und in der von Weitzmann beschriebenen Weise je einmal nach oben und nach unten auflöst. Vgl. Weitzmann 1853, 26f.

36 Hier lässt sich allerdings gut erkennen, welchen Vorteil die Kombination von Vorgängen in der Spindel hat gegenüber der Kombination von *S-relations*, um *C-relations* zu erzeugen. Dem weiter vorn dargelegten Standpunkt Adrian Childs', der sich gegen eine unnötige virtuelle Stimmführung wendet, bietet dieses Modell keine Angriffsfläche, denn die drei möglichen Wege $Ais^{7b6}/Ais^7/E^{7b5}/E^7$, $Ais^{7b6}/Ais^7/d^0/E^7$ und $Ais^{7b6}/gis^0/d^0/E^7$ benötigen alle nur drei *working units*, eine auf- und zwei abwärts.

Ein kleines Klavierstück von Alexander Skrjabin bietet Raum für Demonstrationen fast aller beschriebenen Phänomene: Das *Allegretto* in a-Moll aus den 24 *Préludes* op. 11 (Bsp. 5).

Beispiel 5: Alexander Skrjabin, *Allegretto* op. 11/2, Takte 47–68

In der unterlegten Analyse des Stücks werden die linearen Melodietöne zu Harmonien zusammengefasst, die nicht ausschließlich vertikal, sondern auch in Form von horizontalen Akkordbrechungen oder virtueller Polyphonie erscheinen. In Takt 47 und 48 direkt vor der Reprise schreitet B^{7} über drei chromatische Schritte nach f^{7} – diese Harmonie (mit *gis*, *h* und *dis* statt *as*, *ces* und *es*) würde herkömmlicherweise nicht eigenständig betrachtet, sondern als chromatische Umspielung des Zieltons abgetan, die verspätet über $S^{3(2)}$ in die angesteuerte Dominante E^7 mündete, welche von den Unterstimmen bereits am Taktbeginn etabliert wurde, ebenfalls über drei chromatische Schritte von B^{7} ausgehend. In den bezifferten Kästchen sind die relativen Schritte in den *voice-leading zones* angezeigt, um alle Fortschreitungen zu klassifizieren, die nicht Childs' *relations* entsprechen. Akkordwechsel mit drei chromatisch geführten Stimmen kommen im ganzen Stück gehäuft vor – sie lassen sich, wie bereits im Stück von Hugo Wolf gezeigt, als Kombination in der Spindel deuten. In den meisten Fällen summieren sie sich zu einem einzelnen Schritt abwärts, nur zweimal ergeben sie einen Sprung um drei *voice-leading zones* nach unten³⁷ wie beim Taktwechsel 56–57,³⁸ wo sie zweifach in der Modulation zum zweiten

37 Vergleichbar ist der letzte Akkordwechsel bei Hugo Wolf in Beispiel 4.

38 Dieser Takt veranschaulicht außerdem gut die überlappenden Vierklänge: Die Oberstimme reicht die Quinte von E^7 auf dem zweiten Viertel nach, als im Alt bereits die Terz von a^{7} klingt. Zugleich klingt das *es* als verminderte Quinte bei entsprechend klangvollem Spiel noch eine Viertel weiter und ergänzt

Teil des A-Themas auftreten. Innerhalb von drei Akkorden wird hier das *4-Cube Trio* zur Hälfte umrundet. Anschließend wird vom erreichten G^7 über zwei $C^{3(2)}$ -relations um zwei Kleinterzen abwärts moduliert, was wiederum in der herkömmlichen Musiktheorie einer halben Umrundung des Quintenzirkels entspräche, in unseren Modellen aber nur dem Verweilen in einer Zone. Bemerkenswert ist schließlich noch die Coda: Die Töne über dem einmaligen Bassthema in Takt 65 lassen sich zwar nur spekulativ den Akkorden G^7 , E^7 und d-Moll zuordnen und fallen damit aus dem Rahmen, im vorletzten Takt wird dann jedoch das Prinzip des Orgelpunkts kraftvoll übersteigert, indem die drei relations R^* , S^5 und S^6 schrittweise den Vierklang von oben herab auf die Dominante E^7 herunterziehen. Alle drei kommen zum ersten Mal vor.

Abgesehen von diesen herausstechenden Stellen findet man zuhauf S^n -relations, Halbtonschrittwechsel (gekennzeichnet mit -1) und mehrfach unbestimmte C -relations, die (z. B. in Takt 49) mittels zweier Stimmschritte in einer Zone verbleiben, aber die Akkordklasse ändern. Teilweise ist der Satz durchwirkt mit herkömmlichen diatonischen Verbindungen, beinahe dem gesamten Stück liegen jedoch zwei Prinzipien zugrunde: Bis auf eine Ausnahme (Takt 9, *cresc.*) haben alle aufeinanderfolgenden Akkorde mindestens einen Ton gemeinsam und im Großteil der Fälle überwiegt die Chromatik abwärts deutlich.

6. MULTIPLES 3D-TONNETZ

Ungeachtet der möglichen Erweiterungen können aus dem ›Spindelmodell‹ – selbst in der dargestellten reduzierten Fassung – wie gerade gezeigt Verbindungen gesponnen werden, die die Kompetenzen des *3D-Tonnetzes* sprengen. Fast alle Varianten von *3D-Netzen* kranken an Unregelmäßigkeiten durch *syntonic images*, die je nach Struktur des Ausgangsakkords verschieden häufig auftreten und die relations aus dem Gleichgewicht bringen. Außerdem besteht zwischen dem *Tristan-genus*-Netz und den Netzen anderer Vierklänge kein Konnex. Als Folge davon kann die Verbindung von zwei Vierklängen, zwischen denen die Differenz einer einzigen *working unit* besteht, nicht so dargestellt werden, dass alle gleichen Töne auch räumlich identisch sind und sich ein einzelner Tonwechsel wie im *Tonnetz* als ›umklappende Ecke‹ vollzieht. Ich möchte eine Erweiterung des 3D-Tonnetzes vorschlagen, die es möglich macht, die verschiedenen Akkordklassen miteinander zu verbinden, ein multiples mehrdimensionales Tonnetz (Abb. 16).

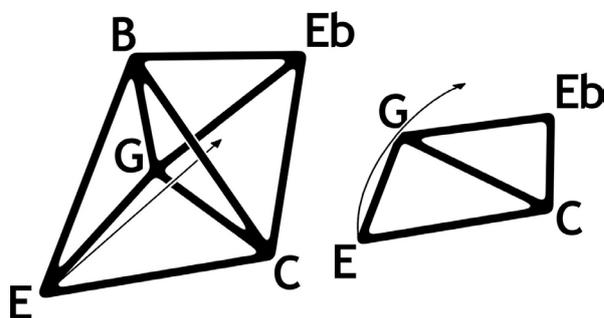


Abbildung 16: C^7/c^7 und P-relation

die verminderte Quinte von a^{07} . Nicht zuletzt kann mit Fingerlegato auch der aufgebrochene Wechsel $a^{07}/D^{7\flat 5}$ ausgespielt werden, indem das a noch eine Achtel länger gehalten wird, bevor es ins as fällt. Durch eine solche Interpretation würde sozusagen der virtuelle chromatische Gang durch die Spindel teilweise real klingend.

In dieser Abbildung wird ein klarer Bruch mit den geometrischen Gesetzen des *3D-Tonnetzes* herbeigeführt, um den Wechsel C^7/c^7 an die Darstellung der einfachen **P-relation** C-Dur/c-Moll anzugleichen. Gebrochen wurde die flache Ebene, indem das hintere Es und damit der fiktive, dahinter liegende Netzbereich an der Achse G-C nach oben gekippt wurde. Gebrochen wurde auch das *Tristan-genus*, das nach vollzogenem Tonschritt sozusagen durch ein ›Wurmloch‹ verlassen wurde – an seiner Statt befindet man sich in einem ›Paralleluniversum‹, dem *3D-Tonnetz* der kleinen Mollseptakkorde. Dadurch, dass im gewöhnlichen *3D-Tonnetz* die Fläche C-G-B des C^7 -Akkords an einen leeren Oktaeder-Hohlraum grenzt und eine Fortbewegung bisher nur über die Tetraederachsen und -spitzen möglich schien, muss diese Progression aus Sicht des C^7 -Klangs tatsächlich wie ein Sprung durch ein Wurmloch anmuten. Nach dem Sprung baut sich um den neuen Akkord c^7 eine neue Umgebung der Möglichkeiten auf. Klassische Fortschreitungen entlang der Achsen und Spitzen, aber auch ungewohnte neue Optionen, durch jede der vier Ebenen in wiederum andere Dimensionen, sind vorstellbar. Beispielsweise durch die Es-G-B-Ebene hindurch nach Es^7 oder durch den c-Moll-Dreiklang hinunter nach a^{07} . Aber man kann sich auch aus der dritten wieder in die zweite Dimension hinunterbegeben und die Bewegung im Umfeld um den c-Moll-Dreiklang auf dem gekippten *Tonnetz* fortsetzen – in diesem Fall würden die beiden Vierklänge zu einem Scharnierelement, welches zwei entfernte *Tonnetze* verbände. Der Grundgedanke, um diese Modulationen darstellen zu können, ist die Auflösung des festen Umfelds eines Drei- oder Vierklangs. Befreit man einen Akkord von dem starren, ihn umgebenden Netz und umgibt ihn dafür mit allen hypothetischen Bewegungen, die geometrisch vorstellbar sind, kann er sich frei in jede beliebige klangliche Dimension entwickeln!

Wun - den trägst du, mein Ge - lieb - ter,

f# D⁷ f# D⁷ f# D⁷ f# D⁷ Eb g eb c B⁷ g A⁷

Beispiel 6: Hugo Wolf, *Wunden trägst du, mein Geliebter* (Spanisches Liederbuch), T. 1–4

Diese Einleitung eines der geistlichen Lieder aus dem *Spanischen Liederbuch* von Hugo Wolf (»Wunden trägst du, mein Geliebter« – Text von Emanuel Geibel, Bsp. 6) lässt sich gut mit den beschriebenen Mitteln darstellen (Abb. 17).³⁹

39 Im dritten und vierten Takt wurden zwei übergebundene verminderte Dreiklänge nicht als eigenständige Harmonien beziffert, weil sie nur aus Durchgangsbewegungen entstanden sind. Die Figur Es-Dur/g-Moll wurde trotz der gleichen melodischen Wendung dennoch beziffert, denn der höhere Konsonanzgehalt lässt die zur Hälfte übergebundenen Akkorde deutlicher hervortreten. Die beiden ausgelassenen Dreiklänge würden in Abbildung 17 als herabhängende Dreiecke dargestellt.

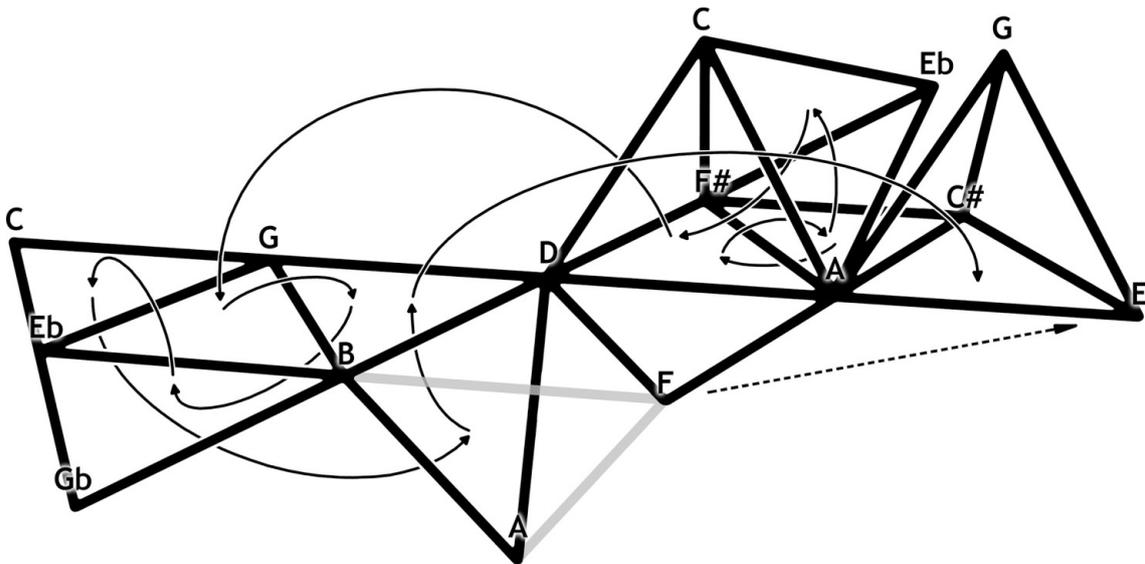


Abbildung 17: Progression in einem multiplen 3D-Tonnetz um d-Moll

Die harmonische Progression umkreist einige Takte lang die Tonika d-Moll, die erst zum Schluss der Phrase in Takt 6 erreicht wird. In Takt 2.3 wird die Dimension des *Tristan-genus* erstmalig verlassen und das Geschehen taucht kurzzeitig in die Welt der verminderten Septakkorde ein. Über die Fläche *fis-a-c* kehrt die Bewegung über D^7 zurück auf das flache *Tonnetz* und springt in einen subdominanten Bereich links von d-Moll. In Takt 4.2 wird ein zweites Mal eine fremde Dimension gestreift: der nach unten hängende – und damit dem um eine *working unit* entfernten B^7 gespiegelt entgegenstehende – $B^{\#7}$, der ohne das *f* als unvollständiger Akkord erklingt (theoretisch wäre auch ein übermäßiger Septakkord mit *fis* denkbar). Nach dem erneuten Schwenk über die Subdominante macht die Entwicklung einen jähen Satz über die Tonika hinweg zur Dominante A^7 , die melodisch in Form eines kleinen Chopin-Akkords die bisher unterschlagene Mollterz *f* der Tonika emanzipiert. Natürlich ließe sich auch dieser Akkord als fremder Tetraeder einbauen, er würde jedoch an der Fläche A-Cis-G angesetzt und damit in den verminderten Septakkord über *fis* hineinragen⁴⁰ – ein Zeichen dafür, dass bei Wolf vor allem im dominanten Bereich eine verhältnismäßig große chromatische Erweiterung stattfindet! Diese Art der Visualisierung vermag auf einfachem Wege Areale wie den dominanten und den subdominanten Bereich darzustellen und Erweiterungen des Ton- und Akkordmaterials passend mit dem grundlegenden *Tonnetz* zu verknüpfen!

Bei stetig modulierenden Stücken stößt auch diese Darstellung an ihre Grenzen, weil sich der Verlauf eines Stückes meist als im Raum wucherndes Gebilde herausstellt, das an den Bau eines verknöteten Proteins erinnert. Der oben diskutierte Ausschnitt aus Skrjabin's *Prélude* hat sich als nur schwer visualisierbar herausgestellt, da erstens Passagen wie die Takte 49 bis 52, in denen mehrere Akkorde aus einer Umgebung gleicher Töne (*d* und *f*) vorkommen, im Raum zu dichten Ballungszentren mutieren und zweitens die ununterbrochene Kette mit wachsender Länge ihren eigenen Pfad im Raum schneidet. Allerdings kann man eine solche Struktur in Teilglieder zerlegen, innerhalb derer sich dann die verschiedenen Unterstrukturen sehr gut visualisieren und unterscheiden lassen (Abb. 18). Die Takte 52 bis 53 bilden z. B. eine kleine Quintachse aus, die die feste Bin-

40 Der geborgte Ton *f* kommt in dieser Darstellung außerdem besser zur Geltung.

dung der entsprechenden Akkorde A^7 , d -Moll und g^7 unterstreicht. Die S^n -Folgen, z. B. in den Takten 51 bis 52, ergeben einen engen Verbund von Tetraedern, die kontinuierlich an einer Achse zusammenhängen.

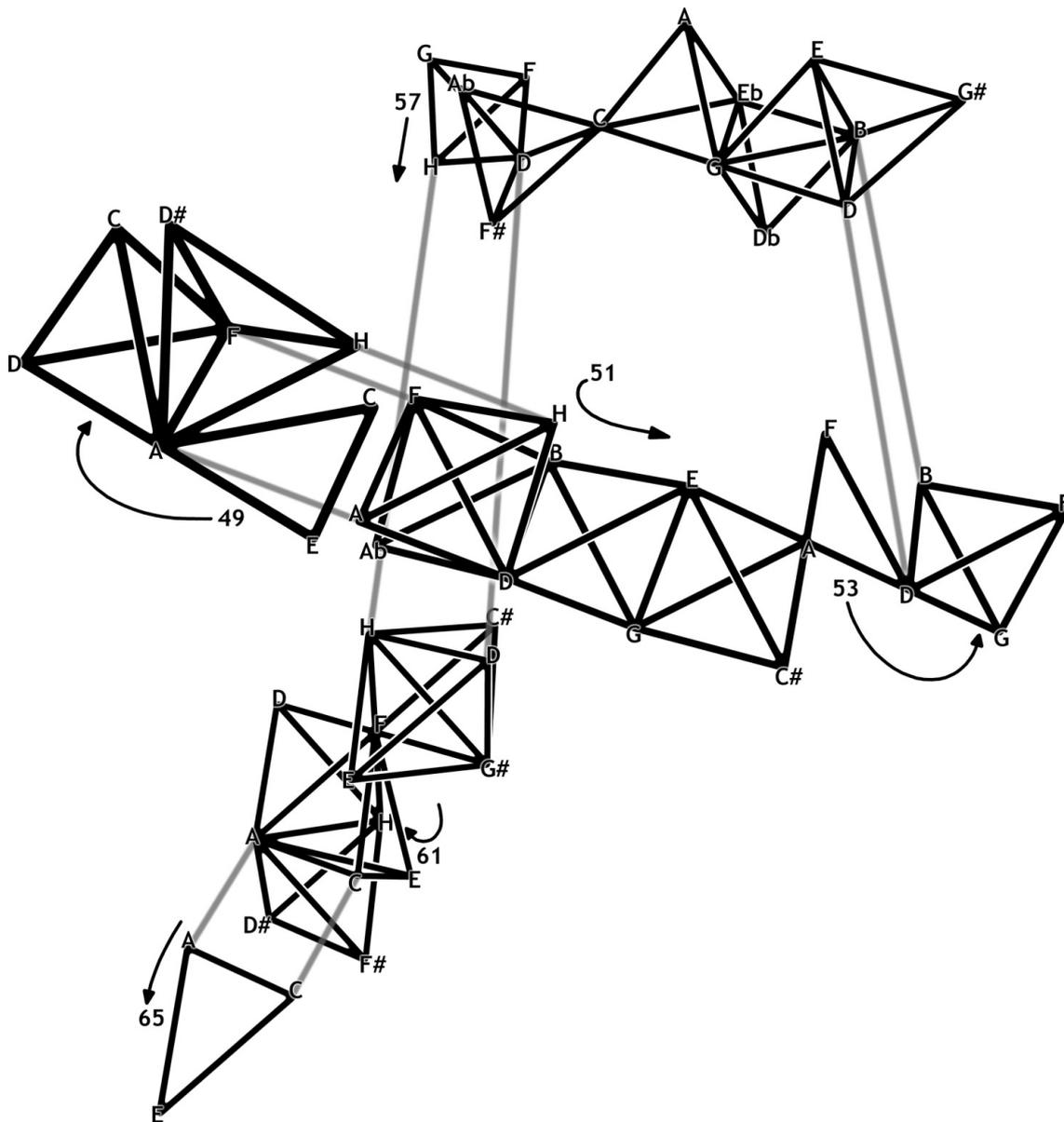


Abbildung 18: Skrjabin's *Prélude* op. 11/2 im multiplen 3D-Tonnetz

Diese Art der Visualisierung verdeutlicht als Schlusspunkt meiner Überlegungen, dass das Modell eines multiplen 3D-Tonnetzes vor allem im kleinen Maßstab anwendbar ist und über größere harmonische Strecken allzu komplexe Resultate liefert.

Generell liegen die Stärken meiner vorgestellten Modelle – der *Hexentreppe*, der *Heart Cubes*, der *Vierklangs-Spindel* und des multiplen 3D-Tonnetzes – nicht im großen Maßstab, sondern im eng gefassten Analysebereich. Sie beschäftigen sich im Sinne der *NRT* mit symmetrischen Strukturen, um besondere musikalische Sachverhalte darstellen zu können, die aus den gewohnten Rastern fallen und schaffen im Kleinen einen neuen Blick auf verborgene Zusammenhänge.

Literatur

- Boretz, Benjamin (1972), »Meta-Variations. Part IV: Analytic Fallout (I)«, *Perspectives of New Music* 11/1, 146–223.
- Childs, Adrian P. (1998), »Moving beyond Neo-Riemannian Triads. Exploring a Transformational Model for Seventh Chords«, *Journal of Music Theory* 42/2, 181–193.
- Cohn, Richard (1997), »Neo-Riemannian Operations, Parsimonious Trichords, and Their Tonnetz Representations«, *Journal of Music Theory* 41/1, 1–66.
- Cohn, Richard (2012), *Audacious Euphony. Chromaticism and the Triad's Second Nature*, New York: Oxford University Press.
- Douthett, Jack / Peter Steinbach (1998), »Parsimonious Graphs: A Study in Parsimony, Contextual Transformations, and Modes of Limited Transposition«, *Journal of Music Theory* 42/2, 241–263.
- Gollin, Edward (1998), »Some Aspects of Three-Dimensional Tonnetze«, *Journal of Music Theory* 42/2, 195–206.
- Hofstaedter, Douglas R. (1979), *Gödel, Escher, Bach – ein endloses geflochtenes Band*, Stuttgart: Klett.
- Lendvai, Ernő (1999), *Bartók's Style*, Budapest: Akkord Music Publishers.
- Singh, Simon (2001), *Geheime Botschaften. Die Kunst der Verschlüsselung von der Antike bis in die Zeiten des Internet*, München: Deutscher Taschenbuch Verlag.
- Weitzmann, Carl Friedrich (1853), *Der Uebermaessige Dreiklang*, Berlin: T. Trautwein'sche Buch- und Musikalienhandlung.

Rieke, Jakob (2019): Cycling in Tonal Space. Neo-Riemannian Theory in der dritten Dimension [Cycling in Tonal Space. Neo-Riemannian Theory in the Third Dimension]. ZGMTH 16/1, 41–65.
<https://doi.org/10.31751/1009>

© 2019 Jakob Rieke (jakob@cajjar.de)
 Musikhochschule Lübeck

Dieser Text erscheint im Open Access und ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
 This is an open access article licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.



eingereicht / submitted: 14/02/2019
 angenommen / accepted: 03/04/2019
 veröffentlicht / first published: 30/06/2019
 zuletzt geändert / last updated: 29/06/2019