ZGMTH Zeitschrift der
Gesellschaft für Musiktheorie

Noll, Thomas (2003/05): Informationen zur Mathematischen Musiktheorie. ZGMTH 1–2/2/2–3, 229–237. https://doi.org/10.31751/199

veröffentlicht / first published: 01/04/2005
zuletzt geändert / last updated: 01/12/2008

Informationen zur Mathematischen Musiktheorie

Thomas Noll

Nachstehend werden ausgewählte mathematische Ansätze zu Musiktheorie und Analyse in knapper Form portraitiert. Die dabei getroffene Auswahl konzentriert sich vor allem auf die Arbeiten von Guerino Mazzola und Mitarbeitern sowie auf Arbeiten, die von jenen angeregt worden sind. Eine Diskussion der Ergebnisse ist nicht Ziel dieses Textes.

Eine Besonderheit der Mazzola-Schule – im Vergleich etwa zu den in den Vereinigten Staaten von John Clough und David Lewin geprägten Schulen mathematischer Musiktheorie – ist die besonders ausgeprägte Rolle mathematischer Theoriebildung. Die musiktheoretische Auseinandersetzung mit diesen Untersuchungen bringt zwei Verständnisprobleme mit sich. Das erste betrifft die Präsenz mathematischer Inhalte an sich, deren oft streng formale Darstellung nicht ohne gewisse Übung erschlossen werden kann. Die eigentliche Schwierigkeit besteht jedoch in der epistemologischen Auslotung der musikalischen bzw. musiktheoretischen Bedeutungen jener mathematischen Inhalte. Der vorliegende Text versucht daher, unter Umgehung formaler Darstellungen mathematischer Inhalte, den Blick auf die interpretatorische Arbeit des mathematischen Musiktheoretikers zu richten. Dies geschieht um den Preis von Auslassungen bzw. von Verharmlosungen. Damit eignet sich dieser Text zwar nicht als Argumentationsbasis für eine aktive Auseinandersetzung mit den hier besprochenen Forschungen, er soll aber dem interessierten Leser helfen, sich eine solche zu erarbeiten.

Mazzolas erste Monographie *Gruppen und Kategorien in der Musik. Entwurf einer mathematischen Musiktheorie* von 1985 verbindet vier Untersuchungsstränge: (a) die Erarbeitung eines theoretischen Rahmens, (b) Untersuchungen zu konkreten musiktheoretischen Fragen, (c) Analysen von Musikbeispielen hinsichtlich jener untersuchten Fragen, (d) experimentelle Auslotung mathematischer Ideen in einer kompositorischen Studie.

Der erste Untersuchungsstrang – die Erarbeitung einer mathematischen Metasprache für die Musiktheorie – spielt in Mazzolas Arbeiten eine zentrale Rolle. In der Strukturmathematik erschließt sich nämlich die Bedeutung eines mathematischen Objekts nicht zuletzt durch dessen Relation zu anderen mathematischen Objekten. Will man nun eine konkrete mathematische Struktur mit musiktheoretischen Inhalten beladen, so kann man strenggenommen nur dann die mathematische Bedeutung jener Struktur in die Musiktheorie übertragen, wenn man auch all jene anderen Strukturen musiktheoretisch mit›interpretiert‹, zu denen jene ausgewählte Struktur aufschlußreiche mathematische

Beziehungen aufweist. Auf den ersten Blick scheint allein dieser Gedanke ein Fall für Ockhams Messer zu sein, aber ein Seitenblick auf das in der Physik erfolgreich angewandte Prinzip der kleinsten Wirkung zeigt, daß die Probleme tiefer liegen. Die Formulierung dieses Prinzips beruht nämlich darauf, die Welt des physikalisch Faktischen theoretisch zu erweitern, um sie dadurch besser zu verstehen. Einer Anwendung von Ockhams Messer bei klugem begriffschirurgischem Instinkt steht freilich auch in der mathematischen Musiktheorie nichts im Wege. Das Argument soll aber beispielhaft verdeutlichen, daß gute Gründe dafür sprechen, nicht bloß isolierte mathematische Strukturen zum Ausgangspunkt musiktheoretischer Interpretation zu machen.

Bei zunehmender Breite von musiktheoretischen, musikanalytischen, musiktechnologischen und anderen Themen hat Mazzola seither parallel an der Erweiterung der mathematischen Theoriesprache gearbeitet und seine 2002 erschienene umfangreiche Monographie *The Topos of Music – Geometric Logic of Concepts, Theory, and Performance* widmet den damit verbundenen mathematischen, semiologischen und epistemologischen Fragen besondere Aufmerksamkeit.

Musiktheoretische Interpretationen affiner Abbildungen

Dieser Abschnitt faßt einige Ergebnisse mathematisch-musiktheoretischer Untersuchungen zu Fragen der Harmonik und des Kontrapunkts zusammen. Was diese Untersuchungen aus mathematischer Sicht verbindet, ist die besondere Rolle von affinen Abbildungen auf Tönen, Intervallen, Akkorden bzw. Akkordgefügen. Warum sich das Interesse gerade auf solche Abbildungen richtet, soll folgende Vorüberlegung motivieren:

Die Verkettung von musikalischen Intervallen ist eine musiktheoretisch sinnvolle Interpretation des Addierens von Vektoren. Es gibt eine direkte und eine indirekte Möglichkeit, einer solchen additiven Struktur gerecht zu werden. Der Akt des Transponierens eines Akkordes oder eines Gefüges von Akkorden läßt sich als Translation interpretieren, d. h. als Abbildung, die jeden Punkt eines Raumes um einen bestimmten Vektor verschiebt. Translationen sind also direkte Manifestationen des Addierens. Der Akt des Spiegelns eines Akkordes oder eines Gefüges von Akkorden an einem festen Spiegelungszentrum hat dagegen die Eigenschaft, daß dabei alle inneren Intervallverhältnisse erhalten bleiben (auch wenn jedes einzelne Intervall seine Richtung umkehrt). Insbesondere stimmt jede gespiegelte Summe mit der Summe der gespiegelten Summanden überein. Mathematische Abbildungen mit jener Eigenschaft, daß die Bilder von Summen mit den Summen der Bilder übereinstimmen (bzw. daß die Bilder von Vielfachen mit den Vielfachen der Bilder übereinstimmen), nennt man linear. Sie verkörpern die Addition nur indirekt, indem sie diese respektieren.

Spiegelungen mit verschiedenen Spiegelzentren sind untereinander durch Translationen verbunden. Die Kombination aus linearen Abbildungen und Translationen nennt man affine Abbildungen. ›Affin‹ meint dabei, daß die Richtungen, die man zwar von jedem Punkt aus verfügbar hat, auch im Zusammenhang betrachtet werden. Der abstrakte Begriff ›Quarte‹ etwa beinhaltet nicht nur die einzelnen isolierten Quart-Instanzen von jedem Bezugston aus, sondern auch deren Zusammenhang als ›Quartfeld‹, das sich via Translation von Bezugston zu Bezugston über den ganzen Tonraum erstreckt.

Unter den Untersuchungen mit dem Ziel, musiktheoretische Fragen mit Hilfe affiner Abbildungen neu zu formulieren und gegebenenfalls besser zu verstehen, verdient zunächst ein spezielles Modulationsmodell von Mazzola (1985) Erwähnung, zu dem später auch andere Autoren beigetragen haben. Es bezieht Anregungen aus Arnold Schönbergs Harmonielehre und versucht über die Untersuchung der in einer Modulation verwendeten Stufen der Zieltonart Spuren einer Wechselwirkung derselben mit der Ausgangstonart auszumachen. Tonarten werden dabei als abstrakte diatonische Stufengefüge im Zwölftonsystem beschrieben, d. h. ohne Auszeichnung einer Tonika und ohne Unterscheidung des Tongeschlechts. Die Wechselwirkung dieser Stufengefüge wird über Translationen bzw. Spiegelungen beschrieben. Man geht von einer die Zieltonart eindeutig kennzeichnenden minimalen Stufenmenge wie {II, V}, {IV, V}, {II, III}, {III, IV} oder {VII} aus und merkt sich die dabei verwendeten Töne. Dann sucht man die mit diesen wechselwirkenden Töne der Ausgangstonart auf und fügt die darunter befindlichen gemeinsamen Töne beider Tonarten zu der anfänglich gemerkten Tonmenge hinzu. Zu den anfänglich gewählten (eindeutig kennzeichnenden) Stufen treten als modulierende Stufen noch jene Stufen der Zieltonart hinzu, die ebenfalls aus der (ggf.) erweiterten Tonmenge gebildet werden. Es sei zum Beispiel C die Ausgangsdiatonik und G die Zieldiatonik mit der durch den Leittonwechsel C-H induzierten Umkehrung als Wechselwirkung und es sei allein die VII. Stufe {F#, A, C} als minimales Kennzeichen für die G-Diatonik gewählt. Die Wechselwirkung vermittelt dann tonweise zwischen F# und F, A und D, sowie C und H und bezieht damit die VII. Stufe von G auf die VII. Stufe von C. Dabei sind die Töne H und D gemeinsame Töne beider Diatoniken und werden den schon gemerkten Tönen F#, A, C hinzugefügt. Als modulierende Stufen kommen damit noch III and V hinzu.

Das mathematische Modell legt diesem Verfahren noch Beschränkungen im Sinne eines Ökonomieprinzips auf. Im Resultat ergibt sich eine Liste von 26 Wechselwirkungsmodulationen. Ein weiterführendes kontrafaktisches Experiment von Daniel Muzzulini (1995) geht von der Überlegung aus, daß sich leitereigene Dreiklänge allgemein als Folge zweier Doppelschritte in einer 7tönigen Skala auffassen lassen. Seine Übertragung des obigen Verfahrens auf die entsprechenden Systeme von ›Dreiklangsgefügen‹ für alle 7tönigen Skalen im Zwölftonsystem ergibt für die Diatonik eine Sonderstellung, weil die Zahl von 26 Wechselwirkungsmodulationen unter jenen 34 Skalen am kleinsten ist, bei denen man via Wechselwirkungsmodulation alle 12 ›Tonarten‹ erreichen kann. Mögliche Zusammenhänge mit anderen besonderen Eigenschaften der Diatonik im Zwölftonsystem (Maximal Evenness, Myhill-Property, Cardinality = Variety) sind aber nicht untersucht worden.

Eine andere Untersuchung Mazzolas (1989, 1990) widmet sich der Rolle von Konsonanzen und Dissonanzen im zweistimmigen Kontrapunkt und ist durch den ausgesprochenen Dichotomie-Charakter dieses Begriffspaares motiviert, welcher von den psychoakustischen Beschreibungsebenen nicht erfaßt wird. Die Komplementarität zwischen den Konsonanzen und Dissonanzen wird durch eine affine Abbildung zwischen den beiden Dichotomiehälften beschrieben, die Mazzola Autokomplementaritätsfunktion nennt. Bei der folgenden Beschreibung numerieren wir die Intervalle im Quintenzirkel, also 0 = Prime/Oktave, 1 = Quinte, 2 = große Sekunde, 3 = große Sexte, 4 = große Terz, 5 = große Septime, 6 = Tritonus, 7 = kleine Sekunde, 8 = kleine Sexte, 9 = kleine Terz, 10 = kleine Septime, 11 = Quarte. Die Dichotomiehälften sind dann {0, 1, 3, 4, 8, 9} und {2, 5, 6, 7, 10, 11}. Die Autokomplementaritätsfunktion tauscht jedes Intervall x mit dem Intervall 5x + 2 mod 12 aus, also die große Sekunde 2 mit der Prime 0, die große Septime 5 mit der großen Sexte 3, den Tritonus 6 mit der kleinen Sexte 8, die Quarte 11 mit der kleinen Terz 9 sowie die kleine Septime 10 mit der großen Terz 4 und die kleine Sekunde 7 mit der Quinte 1.

Diese Abbildung hat interessante Eigenschaften unter dem Gesichtspunkt der Klein- und Großterzverwandtschaft von Intervallen. Einerseits stellt man leicht fest, daß die Konsonanzen untereinander viele Terzverwandtschaften besitzen (Terzen zu Prime und Quinte, die Sexten zur Oktave etc.), d. h. die Konsonanzen liegen als Familie auf dem Terztorus nahe beieinander. Das gleiche gilt für die Dissonanzen untereinander.

Zudem ist die Autokomplementaritätsfunktion eine Zentralspiegelung des Terztorus, d. h. sie tauscht die Kleinterz-Verwandtschaftszyklen {0, 3, 6, 9} und {2, 5, 8, 11} untereinander aus, während sie den Zyklus {1, 4, 7, 10} in sich selbst spiegelt. Außerdem tauscht sie die jeweils diametral gegenüberliegenden Großterz-Verwandtschaftszyklen {1, 5, 9} und {7, 11, 3} bzw. {2, 6, 10} und {0, 8, 4} untereinander aus. Für die Komplementarität der Konsonanzen und Dissonanzen bedeutet dies, daß je aufeinander bezogene Intervalle weit entfernt voneinander liegen.

Die Dichotomiehälfte {0, 1, 3, 4, 8, 9} der Konsonanzen hat eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft, nämlich daß sie ein Monoid ist, d. h. daß alle Produkte dieser sechs Zahlen (mod 12) stets wieder unter diesen selbst anzutreffen sind. Für die Dissonanzen untereinander gilt dies in vielen Fällen nicht, insbesondere für die Multiplikation jeder Dissonanz mit sich selbst. Ich habe diese Eigenschaft als eine mögliche mathematische Erklärung für die Markiertheit der Dissonanzen betrachtet, die sich z. B. in deren Auflösungsbedarf äußert. Insbesondere sind die schlußfähigen Konsonanzen 0, 1, 4, 9 idempotent, d. h. sie stimmen mit ihren eigenen Potenzen überein: $0^2=0$, $1^2=1$, $4^2=4$, $9^2=9$ mod 12. Eine theoretische Bedeutung der Intervall-Multiplikation ergibt sich im Zusammenhang mit der Morphologie der Akkorde (siehe weiter unten).

Mazzola hat die Autokomplementaritätsfunktion im Rahmen eines Modells für rein konsonante Fortschreitungen benutzt, das eine Ableitung für das Quintenparallelenverbot und die Fuxschen Tritonusverbote beinhaltet.

Die Konsonanz/Dissonanz-Dichotomie kann auch in Form eines kontrafaktischen Arguments diskutiert werden. Rein kombinatorisch gibt es 924 Möglichkeiten, um aus den zwölf Intervallen {0, 1, 2, ..., 11} sechs konsonante Intervalle auszuwählen. Aber nur eine einzige von den dabei gewonnenen Dichotomien hat jene drei Eigenschaften der Autokomplementät, der Distanz der Dichotomiehälften und der Markiertheit: die ›faktische‹ Konsonanz/Dissonanz-Dichotomie {0, 1, 3, 4, 8, 9}/{2, 5, 6, 7, 10, 11}.

In eigenen Untersuchungen zur Morphologie der Akkorde (Noll 1995) dienen Tonperspektiven – gemeint sind die 144 affinen Abbildungen des Zwölftonsystems – zur

Modellierung von Akkordvertretung in der Funktionsharmonik. Dabei werden jene Tonperspektiven, die einen Akkord in sich selbst abbilden, als stabilisierende Eigenschaften desselben angesehen. Die Selbstperspektiven der Dur- und Molldreiklänge werden bei diesem Ansatz mit tonalen Funktionen assoziiert. Der Ansatz verbindet Hugo Riemanns Begriff eines beziehenden Tondenkens mit der mathematischen Überlegung, daß die Töne und Intervalle via affiner Abbildungen miteinander zusammenhängen. Das Beziehen der Quinte C-G auf die große Sexte G-E bedeutet genaugenommen das Beziehen dieser Quinte auf eine quintverschobene ›Dreifach-Quinte‹ (modulo Oktave). Die damit festgelegte Tonperspektive überführt dann auch jeden anderen Ton x in den Ton 3x + 1 mod 12. Also wird die große Sexte G-E ihrerseits (aufgrund des affinen Zusammenhangs) auf die kleine Terz E-G bezogen, da ja jede der drei Teilquinten aufgrund des Faktors 3 in eine Sexte abgebildet wird, und damit die Sexte G – E (als ›Dreifach-Quinte‹) auf eine ›Neunfach-Quinte‹, sprich: auf eine kleine Terz. Entscheidend für die Bezeichnung dieser Tonperspektive als Selbstperspektive des C-Dur-Dreiklangs ist die Tatsache, daß auch der Ton E seinerseits auf einen Ton dieses Dreiklangs bezogen wird – in diesem Falle auf G.

Ein wichtiger Bestandteil dieser Untersuchungen ist das Studium und die Interpretation der Verknüpfung mehrerer Tonperspektiven. Die Selbstperspektiven eines Akkordes bilden eine unter paarweiser Verknüpfung abgeschlossene Familie: ein Monoid. Daraus ergeben sich Anknüpfungspunkte an Hugo Riemanns Vorschlag, musikalisches Denken mit dem logischen Denken zu vergleichen. Im Kontext der Toposlogik von Monoidaktionen auf Akkorden erhalten verallgemeinerte Wahrheitswerte genuin musikalische Bedeutung (Noll 2004).

Klassifikation und Quasianalyse musikalischer Strukturen

Einen weiteren Untersuchungszweig, den neben Mazzola vor allem Harald Fripertinger systematisch erschlossen hat, bildet die Klassifikation mathematischer Strukturen, worunter sich solche mit besonderer musiktheoretischer Bedeutung befinden. Dahinter steht das Bedürfnis, mathematisch-musiktheoretische Aussagen in einem geigneten Kontext zu formulieren und zu verstehen. Insbesondere spielt dabei das Paradigma der affinen Abbildungen eine bevorzugte Rolle. Für Akkorde oder Motive in verschiedenen Tonsystemen und rhythmischen Perioden liegen vollständige Listen von Repräsentanten bzw. zumindest deren Anzahlen vor.

Die systematische Suche nach mathematischen Strukturen mit musikalisch interessanten Eigenschaften ist auch aus kompositorischer Perspektive interessant. So hat Dan Tudor Vuza (1990) eine besondere Art rhythmischer Kanons konstruiert, deren Stimmen einerseits niemals zusammentreffen, aber andererseits jeden Schlag abdecken. Die Besonderheit dieser Kanons ist, daß weder der innere Rhythmus, den die Stimmen je zeitversetzt spielen, noch der äußere Rhythmus der Stimmeinsätze völlig regelmäßig ist. Das einfachste bekannte Beispiel hat 6 Stimmen mit der Periode 72. Der innere Rhythmus ist (0, 1, 5, 6, 12, 25, 29, 36, 42, 48, 49, 53) und der äußere Rhythmus ist (0, 8, 16, 18, 26, 34). Emmanuel Amiot, Moreno Andreatta und Harald Fripertinger haben seither an der Untersuchung solcher Strukturen gearbeitet.

Kanons sind ihrerseits ein sehr spezieller Fall des Zusammengesetztseins einer komplexen musikalischen Struktur aus Bestandteilen. Mazzola hat der allgemeinen Thematik globaler Kompositionen umfangreiche Untersuchungen gewidmet. Dabei handelt es sich um mathematische Objekte, deren Definitionen von Bernhard Riemanns Begriff der Mannigfaltigkeit inspiriert sind. Es sind nämlich bereits die Definitionen dieser globalen Objekte, die aus mehreren miteinander lokal verträglichen Definitionen zusammengesetzt sind. Vor diesem Hintergrund sind von mehreren Autoren konkrete Verfahren für die mathematische Untersuchung von Musikstücken entwickelt worden.

Eine interpretatorische Grundschwierigkeit musikalischer Analyse besteht darin, daß man mit der Isolierung von Teilen und der Untersuchung ihrer paradigmatischen und syntagmatischen Beziehungen zwar wertvolle Einsichten gewinnen kann, daß es aber deswegen nicht automatisch gerechtfertigt ist, diese Teile als Bestandteile der Musik im konstitutiven Sinne anzusehen. Dieser Einwand gilt allgemein, obgleich er sich bei einigen in der mathematischen Musiktheorie entwickelten Ansätzen verschärft. Es ist daher hilfreich, wenn man im folgenden ›Analyse‹ im Sinne von Carnaps Begriff der Quasianalyse versteht.

Die Ansätze zur metrischen und melodischen Analyse sind zu experimentellen Zwekken im Rahmen des Softwareprojektes RUBATO ausgearbeitet worden, welches musikalische Analyse und musikalische Gestaltung experimentell miteinander verknüpft.[1]

Bei der inneren metrischen Analyse werden die Inzidenzbeziehungen von lokalen Metren, d. h. von arithmetischen Folgen von Toneinsätzen untersucht. ›Innere metrische Analyse‹ meint, daß diese Metren in der Partitur selbst durch Toneinsätze oder andere Ereignisse exemplifiziert werden. Die Inzidenzbeziehungen werden durch innere metrische Gewichte quantifiziert. Anja Volk hat in vielen Experimenten nachgewiesen, daß sich Metrizität im musikalischen Sinne anhand der Periodizitäten jenes inneren metrischen Gewichts untersuchen läßt.

Im Falle der melodischen Analyse kommen zwei Formen paradigmatischer Beziehungen ins Spiel: Symmetrie und Ähnlichkeit. Das Interesse an einem (Quasi-)Bestandteil der Melodie richtet sich nach dem Vorhandensein anderer Bestandteile, die mit ihm bis auf Umkehrung, Augmentation, Diminution etc. übereinstimmen bzw. zu ihm ähnlich sind. Für die Bestimmung der Ähnlichkeit werden Gestaltparadigmen mit Hilfe von Topologien modelliert. Chantal Buteau hat dazu umfangreiche Untersuchungen angestellt. Eine Konsequenz dieses rein paradigmatischen Interesses ist, daß sich die konkrete syntagmatische Kombinatorik der interessanten Bestandteile als empirisches Resultat ergibt, die entweder als Gewicht quantifiziert werden kann oder ihrerseits zum Anlaß weiterer Untersuchungen dienen kann. Andreas Nestke hat hierzu zahlreiche kombinatorische Untersuchungen durchgeführt.

1 http://www.rubato.org.

Literatur

Andreatta, Moreno (1999), *La théorie mathématique de la musique de Guerino Mazzola et les canons rythmiques*, Mémoire DEA, Paris: EHESS / IRCAM.

—— (2003), »Méthodes algébriques en musique et musicologie du XXe siècle: aspects théoriques, analytiques et compositionnels«, Diss., Paris: EHESS / IRCAM.

—— (2004), »On group-theoretical methods applied to music: some compositional and implementational aspects«, in: *Perspectives of Mathematical and Computational Music Theory*, hg. von Guerino Mazzola, Thomas Noll und Emilio Lluis-Puebla, Osnabrück: epOs Music, 169–193.

Amiot, Emmanuel (2004), »Why Rhythmic Canons Are Interesting«, in: *Perspectives of Mathematical and Computational Music Theory*, hg. von Guerino Mazzola, Thomas Noll und Emilio Lluis-Puebla, Osnabrück: epOs Music, 194–213.

Beran, Jan / Guerino Mazzola (1999), »Analyzing Musical Structure and Performance – a Statistical Approach«, *Statistical Science* 14, 47–79.

Buteau, Chantal (1998), »Motivic Topologies and their Signification in Musical Motivic Analysis«, Magisterarbeit, University Laval/Quebec.

—— / Guerino Mazzola (2000), »From Contour Similarity to Motivic Topologies«, *Musicae Scientiae* 4, 125–149.

—— (2001), »Reciprocity Between Presence and Content Functions on a Gestalt Composition Space«, *Tatra Mountains Mathematical Publication* 23, 17–45.

—— (2003), »A Topological Model of Motivic Structure and Analysis of Music: Theory and Operationalization«, Diss., Universität Zürich.

—— (2004), »Motivic Spaces of Scores through RUBATO's MeloTopRUBETTE«, in: *Perspectives of Mathematical and Computational Music Theory*, hg. von Guerino Mazzola, Thomas Noll und Emilio Lluis-Puebla, Osnabrück: epOs Music, 330–342.

Chemillier, Marc / Charlotte Truchet (2004), »Computation of words satisfying the ›Rhythmic Oddity Property‹«, in: *Perspectives of Mathematical and Computational Music Theory*, hg. von Guerino Mazzola, Thomas Noll und Emilio Lluis-Puebla, Osnabrück: epOs Music, 214–222.

Ferretti, Roberto G. / Guerino Mazzola (2001), »Algebraic Varieties of Musical Performances«, *Tatra Mountains Mathematical Publication* 23, 59–69.

—— (2004), »Algebraic Varieties of Musical Performances«, in: *Perspectives of Mathematical and Computational Music Theory*, hg. von Guerino Mazzola, Thomas Noll und Emilio Lluis-Puebla, Osnabrück: epOs Music, 223–232.

Fripertinger, Harald (1991), »Untersuchungen über die Anzahl verschiedener Intervalle, Akkorde, Tonreihen und anderer musikalischer Objekte in n-Ton Musik«, Magisterarbeit, Hochschule für Musik und Darstellende Kunst, Graz.

—— (1993), »Endliche Gruppenaktionen in Funktionenmengen – Das Lemma von Burnside – Repräsentantenkonstruktionen – Anwendungen in der Musiktheorie«, *Bayreuther Mathematische Schriften* 45, 19–135.

—— (1999), »Enumeration of Mosaics«, *Discrete Mathematics* 199, 49–60.

—— (2001), »Enumeration of Non-isomorphic Canons«, *Tatra Mountains Mathematical Publications* 23, 47–57.

—— Fripertinger, Harald (2004), »Tiling Problems in Music Theory«, in: *Perspectives of Mathematical and Computational Music Theory*, hg. von Guerino Mazzola, Thomas Noll und Emilio Lluis-Puebla, Osnabrück: epOs Music, 153–168.

Hichert Jens (1993), »Verallgemeinerung des Kontrapunkttheorems für die Hierarchie aller starken Dichotomien in temperierter Stimmung«, Diplomarbeit, TU Ilmenau.

Mazzola, Guerino (1985), *Gruppen und Kategorien in der Musik*, Heldermann, Berlin.

—— u. a.(1989), »A Symmetry-Oriented Mathematical Model of Classical Counterpoint and Related Neurophysiological Investigations by Depth-EEG«, in: *Symmetry II*, hg. von Istvan Hargittai, New York: Pergamon Press, 539–594.

—— u. a.(1989), »Hirnelektrische Vorgänge im limbischen System bei konsonanten und dissonanten Klängen«, in: *Musik-Gehirn-Spiel. Beiträge zum 4. Herbert-von-Karajan-Symposion*, hg. von Helmut Petsche, Basel: Birkhäuser, 135–152.

—— (1990), *Geometrie der Töne*, Basel: Birkhäuser.

—— / Daniel Muzzulini (1990), »Tempo- und Stimmungsfelder: Perspektiven künftiger Musikcomputer«, in: *Mikrotöne III*, hg. von Hans Peter Hesse, Innsbruck: Edition Helbling, 183–191.

—— (1991), »Mathematische Musiktheorie: Status quo 1990«, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung* 93, 6–29.

—— (1993), *Mathematical Music Theory – An Informal Survey*, Edizioni Cerfim, Locarno.

—— / Oliver Zahorka (1994), »Tempo Curves Revisited: Hierarchies of Performance Fields«, *Computer Music Journal* 18, 40–52.

—— (1998), »Semiotic Aspects of Musicology: Semiotics of Music«, in: *A Handbook on the Sign-Theoretic Foundations of Nature and Culture*, hg. von Roland Posner u. a., Berlin New York: Walter de Gruyter, 3119–3188.

—— (2002), *The Topos of Music*, Basel: Birkhäuser.

—— (2004), »Mathematical Music Theory-Status Quo 2000«, in: *Perspectives of Mathematical and Computational Music Theory*, hg. von Guerino Mazzola, Thomas Noll und Emilio Lluis-Puebla, Osnabrück: epOs Music, 42–77.

—— (2004), »Towards a Galois Theory of Concepts«, in: *Perspectives of Mathematical and Computational Music Theory*, hg. von Guerino Mazzola, Thomas Noll und Emilio Lluis-Puebla, Osnabrück: epOs Music, 78–88.

Montiel, Mariana (2004), »The Denotator: Its Structure, Construction, and Role in Mathematical Music Theory«, in: *Perspectives of Mathematical and Computational Music Theory*, hg. von Guerino Mazzola, Thomas Noll und Emilio Lluis-Puebla, Osnabrück: epOs Music, 89–105.

Müller, Stefan (2004), »Parametric Gesture Curves: A Model for Gestural Performance«, in: *Perspectives of Mathematical and Computational Music Theory*, hg. von Guerino Mazzola, Thomas Noll und Emilio Lluis-Puebla, Osnabrück: epOs Music, 106–116.

Muzzulini, Daniel (1995), »Musical Modulation by Symmetries«, *Journal of Music Theory* 39, 311–325.

Nestke, Andreas / Thomas Noll (2001), »Inner Metric Analysis«, *Tatra Mountains Mathematical Publications* 23, 91–111.

—— (2004), »Paradigmatic Motivic Analysis«, in: *Perspectives of Mathematical and Computational Music Theory*, hg. von Guerino Mazzola, Thomas Noll und Emilio Lluis-Puebla, Osnabrück: epOs Music, 343–365.

Noll, Thomas (1995), »Morphologische Grundlagen der abendländischen Harmonik«, Diss., TU Berlin = *Musikometrika* 7 (1997).

—— (1998), »Harmonische Morpheme«, *Musikometrika* 8, 7–32.

—— (1999), »The Consonance/Dissonance-Dichotomy Considered from a Morphological Point of View«, in: *Music and Signs*, hg. von Iannis Zannos, Bratislava: ASCO Publications, 255–277.

—— (2004), »Vade Mecum to Mathematical Music Theory«, in: *Perspectives of Mathematical and Computational Music Theory*, hg. von Guerino Mazzola, Thomas Noll und Emilio Lluis-Puebla, Osnabrück: epOs Music, 14–29.

—— / Monika Brand (2004), »Morphology of Chords«, in: *Perspectives of Mathematical and Computational Music Theory*, hg. von Guerino Mazzola, Thomas Noll und Emilio Lluis-Puebla, Osnabrück: epOs Music, 366–398.

—— / Jörg Garbers (2004), »Harmonic Path Analysis«, in: *Perspectives of Mathematical and Computational Music Theory*, hg. von Guerino Mazzola, Thomas Noll und Emilio Lluis-Puebla, Osnabrück: epOs Music, 399–431.

—— (2004), »The Topos of Triads«, in: »Colloquium on Mathematical Music Theory«, hg. von Harald Fripertinger und Ludwig Reich, *Grazer Mathematische Berichte* 247, 103–135.

—— / Anja Volk (2005), »Transformationelle Logik der Dissonanzen und Konsonanzen«, in: *Mathematische Musik – musikalische Mathematik*, hg. von Bernd Enders, Saarbrücken: Pfau, 99–112.

Roeder, John (1993), »A MaMuTh Achievement«, *Perspectives of New Music*, 31, 294–312.

Volk, Anja (2003), *Die analytische Interpretation. Schritte zur Erschließung eines Forschungsfeldes am Beispiel der Metrik,* Diss., www.dissertation.de.

—— (2004), »Metric Investigations in Brahms' Symphonies«, in: *Perspectives of Mathematical and Computational Music Theory*, hg. von Guerino Mazzola, Thomas Noll und Emilio Lluis-Puebla, Osnabrück: epOs Music, 300–329.

Vuza, Dan (1991–93), »Supplementary Sets and Regular Complementary Unending Canons«, Serialized in four parts in *Perspectives of new Music* 29, 22–49; 30, 102–125; 184–207 und 31, 270–305.